This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Doctor W. Bernau,
1874.

Krummlinige Geometrie,

zur

praktischen Anwendung und Auflösung der Integral-Ausdrücke, die sich auf Raumgrößen beziehen;

für

angehende Baukünstler und andere Geschäftmänner.

Zunächst

als Handbuch zum mathematischen Unterrichte in der K. S. Bauschule und der technischen Bildunganstalt zu Dresden.

Herausgegeben

von

G. A. Fischer,

Professor der Mathematik am Königl. Sächs. Cadettenhause und Lehrer an obigen beiden Instituten.

Mit 8 Kupfertafeln.

Dresden und Leipzig,
in der Arnoldischen Buchhandlung.
1828.

Doctor M. Bermann,
1844.

Krummlinige Geometrie,

zur

praktischen Anwendung und Auflösung der Integral-Ausdrücke, die sich auf Raumgrößen beziehen;

für

angehende Baukünstler und andere Geschäftmänner.

Zunächst

als Handbuch zum mathematischen Unterrichte in der K. S. Bauschule und der technischen Bildunganstalt zu Dresden.

Herausgegeben

von

G. A. Fischer,

Professor der Mathematik am Königl. Sächs. Cadettenhause und Lehrer an obigen beiden Instituten.

Mit 8 Kupfertafeln.

Dresden und Leipzig,
in der Arnoldischen Buchhandlung.
1828.

W. W. Beman.
Oct. 25-1923

Einer hohen

Direction der technischen Bildung-Anstalt

zu Dresden,

als Zeichen tiefster Ehrerbietung

gewidmet

vom

Verfasser
G. A. Fischer,
Professor.

12-30-37. HRT.

128045

W. W. Beman.
Sept. 25-1923

Einer hohen

Direction der technischen Bildung-Anstalt

zu Dresden,

als Zeichen tiefster Ehrerbietung

gewidmet

vom

Verfasser
G. A. Fischer,
Professor.

12-30-37. HRT.

128045

Für solche nun, bei welchen die ersten Elementarkenntnisse der reinen Mathematik vorauszusetzen sind, ist vorliegendes Werkchen vorzüglich bestimmt, indem die darin enthaltenen Aufgaben größtentheils Beziehung auf praktische Gegenstände haben.

Ob nun schon ihre Lösungen auf Gründen der Differenzial- und Integral-Rechnungen beruhen, so sind selbige doch so construirt, daß sie von Jedem, der sich die so eben erwähnten Vorkenntnisse angeeignet und den Gebrauch der logarithmischen und trigonometrischen Tafeln gehörig bekannt gemacht hat, mit Leichtigkeit ausgeführt werden können.

Die Hoffnung, daß diese Sammlung von Aufgaben für angehende Baukünstler und Geschäftsmänner nicht ohne Nutzen sein dürfte, beruht auf folgender Thatsache:

Bei Vollendung des Thurmes der hiesigen Annenkirche, wurde die Vergoldung des dazu gehörigen Knopfes einem geschickten Gürtlermeister übertragen. Wäre dieser Knopf kugelförmig gestaltet gewesen, so würde die zu Bestimmung des Kostenaufwandes noth-

wendig zu wissende Außenfläche von ihm berechnet worden sein; weil derselbe aber einen Ellipsoid darstellte, so setzte ihn dieser Umstand bei Abschließung des Accord's in Verlegenheit, und er mußte sich deshalb fremder Hülfe bedienen. (Die 38ste Aufgabe zeigt die Auflösung einer ähnlichen Forderung).

Diese Sammlung ist übrigens als Fortsetzung meiner bereits erschienenen „rechnenden Geometrie" zu betrachten, und dankbar suchte ich bei Bearbeitung dieses Werkchens die Winke des verehrten Kunstrichters über jene Schrift (Jenaische allgemeine Literaturzeitung, Ergänzungsblatt Nr. 79, Jahrgang 1827) beßtmöglichst zu benutzen.

Kein anderer Antrieb, als der Wunsch, angehenden Baukünstlern und andern Kunstverwandten, so wie insbesondere den Zöglingen der Königlich Sächsischen Bauschule und der neu errichteten technischen Bildungsanstalt durch diese Sammlung ein brauchbares Handbuch zu liefern, hat mich zu deren Bearbeitung bestimmt.

Zugleich entledige ich mich der eben so schuldigen als angenehmen Pflicht, dem Lehrer an der hiesigen

technischen Bildungsanstalt, Herrn Johann Andreas Schubert, für die willfährige und sorgfältige Unterstützung zu danken, mit welcher sich derselbe des, aus den Berechnungen hervorgehenden mühsamen Auftragens der Figuren, zum Beßten des Werks, unterzogen hat.

Dresden, im September 1828.

Der Verfasser.

Erſter Abſchnitt.

Einleitung.

§. 1.

Die Berechnung regulairer krummer Linien, Flächen und Körper, ſo wie die Auffindung ihrer Schwerpunkte, beruhet mehrentheils auf der vortheilhaften Anwendung der Differenzial- und Integral-Rechnung.

Ohne auf die Entſtehung der allgemeinen Ausdrücke Rückſicht zu nehmen, die bei nachſtehenden Aufgaben zum Grunde gelegt worden ſind, ſoll hier blos die Anwendung derſelben auf practiſche Gegenſtände, und ihre Ausübung in Zahlen gezeigt werden.

In dieſen allgemeinen Ausdrücken ſind jedoch nicht ſelten Glieder enthalten, welche auf natürliche Logarithmen, ſo wie auf trigonometriſche Funktionen ſich beziehen, die zur Beſtimmung der Bogen in Theilen des Halbmeſſers $= 1$ zu wiſſen nothwendig ſind. Um nun von der hier gebrauchten Bezeichnung dieſer Größen und deren Ausübung in Zahlen einen vorläufigen Begriff zu erhalten, möge folgende Erläuterung vorangehen.

§. 2.

Wenn φ einen Bogen in Gradmaß, ferner

S. deſſen Sinus,
C. » Coſinus,
T. » Tangente,
T. » Cotangente

Sec. dessen Secante,
Sec. = Cosecante,
Sv. = Sinusversus,
Sv. = Cosinusversus, und

B.φ die Länge obigen Bogens in Theilen des Halbmessers = 1 bezeichnet; liest man den allgemeinen Ausdruck B.S.$\left(=\frac{m}{n}\right)$ = B.φ oder B.S. $\frac{m}{n}$ = B.φ: der Bogen, welcher dem Sinus = $\frac{m}{n}$ zugehört, ist in Theilen des Halbmessers 1 = B.φ. Eben so bezeichnet B.T. $\sqrt{\frac{bx}{a-x}}$ = B.φ den Bogen der Tangente = $\sqrt{\frac{bx}{a-x}}$, in Theilen des Halbmessers 1 ausgedrückt.

§. 3.

I. Bestimmung des Gradmaßes von φ, wenn der Sinus = $\frac{m}{n}$ gegeben ist und m = 3; n = 16 bezeichnet, so wie die Bestimmung des Werthes,

von B.S. $\frac{m}{n}$ = B.φ.

1) Mit Hülfe solcher Tafeln, worinnen die trigonometrischen Linien ohne Logarithmen enthalten sind.

Man verwandle den Sinus $\frac{m}{n} = \frac{3}{16}$ in den Decimalbruch 0,1875000, suche mittelst der trigonometrischen Tafeln, das, diesem Sinus entsprechende Gradmaß.

S. 0,1875000 = 10° 48′

3813
47,62|1187,00|24″
952 4
234 60

Daher ist das Gradmaß vom S. = 0,1875000 = 10° 48′ 24″ = φ.

Oder 2) **Wenn in den Tafeln, nur die Logarithmen der trigonometrischen Linien befindlich sind.**

Hier ist zuförderst der Logarithme zu dem, als Linie gegebenen Sinus aufzusuchen und 10 hinzu zu addiren:

Log. 0,1875 = 0,2730013 — 1
+ 10
Log. S. 0,1875 = 9,2730013 = 10° 48′ 24″ = φ wie in vorstehender Aufgabe.

27263

110,30|2750,00

110 30,2750 00| = 24″

Das gefundene Gradmaß, 10° 48″ 24″ in Theilen des Halbmessers = 1 auszudrücken, kann durch die Proportion 360° : 10° 48′ 24″ = 6,28314... : x geschehen.

Zur Erleichterung sind die Längen der Bogen von sämmtlich aufeinander folgenden Graden, Minuten und Secunden in folgenden Tabellen berechnet anzutreffen.

Es enthält nämlich Tabelle A, die Theile des Halbmessers = 1 der auf einander folgenden Grade; B, die der Minuten und C, die der Secunden eines Bogens.

Tabelle A.

Verwandlung des Gradmaßes in Theile des Halbmessers 1.

Gr.	Länge.	Gr.	Länge.	Gr.	Länge.	Gr.	Länge.
1	0,01745329	45	0,78539816	89	1,55334303	133	2,32128791
2	0,03490659	46	0,80285146	90	1,57079633	134	2,33874120
3	0,05235988	47	0,82030475	91	1,58824962	135	2,35619449
4	0,06981317	48	0,83775804	92	1,60570291	136	2,37364778
5	0,08726646	49	0,85521133	93	1,62315620	137	2,39110108
6	0,10471976	50	0,87266463	94	1,64060950	138	2,40855437
7	0,12217305	51	0,89011792	95	1,65806279	139	2,42600766
8	0,13962634	52	0,90757121	96	1,67551608	140	2,44346095
9	0,15707963	53	0,92502450	97	1,69296937	141	2,46091425
10	0,17453293	54	0,94247780	98	1,71042267	142	2,47836754
11	0,19198622	55	0,95993109	99	1,72787596	143	2,49582083
12	0,20943951	56	0,97738438	100	1,74532925	144	2,51327412
13	0,22689280	57	0,99483767	101	1,76278254	145	2,53072742
14	0,24434610	58	1,01229097	102	1,78023584	146	2,54818071
15	0,26179939	59	1,02974426	103	1,79768913	147	2,56563400
16	0,27925268	60	1,04719755	104	1,81514242	148	2,58308729
17	0,29670597	61	1,06465084	105	1,83259571	149	2,60054059
18	0,31415927	62	1,08210414	106	1,85004901	150	2,61799388
19	0,33161256	63	1,09955743	107	1,86750230	151	2,63544717
20	0,34906585	64	1,11701072	108	1,88495559	152	2,65290046
21	0,36651914	65	1,13446401	109	1,90240888	153	2,67035376
22	0,38397244	66	1,15191731	110	1,91986218	154	2,68780705
23	0,40142573	67	1,16937060	111	1,93731547	155	2,70526034
24	0,41887902	68	1,18682389	112	1,95476876	156	2,72271363
25	0,43633231	69	1,20427718	113	1,97222205	157	2,74016698
26	0,45378561	70	1,22173048	114	1,98967535	158	2,75762022
27	0,47123890	71	1,23918377	115	2,00712864	159	2,77507351
28	0,48869219	72	1,25663706	116	2,02458193	160	2,79252680
29	0,50614548	73	1,27409035	117	2,04203522	161	2,80998010
30	0,52359878	74	1,29154365	118	2,05948852	162	2,82743339
31	0,54105207	75	1,30899694	119	2,07694181	163	2,84488668
32	0,55850536	76	1,32645023	120	2,09439510	164	2,86233997
33	0,57595865	77	1,34390352	121	2,11184839	165	2,87979327
34	0,59341195	78	1,36135682	122	2,12930169	166	2,89724656
35	0,61086524	79	1,37881011	123	2,14675498	167	2,91469985
36	0,62831853	80	1,39626340	124	2,16420827	168	2,93215314
37	0,64577182	81	1,41371669	125	2,18166156	169	2,94960644
38	0,66322512	82	1,43116999	126	2,19911486	170	2,96705973
39	0,68067841	83	1,44862328	127	2,21656815	171	2,98451302
40	0,69813170	84	1,46607657	128	2,23402144	172	3,00196631
41	0,71558499	85	1,48352986	129	2,25147474	173	3,01941961
42	0,73303829	86	1,50098316	130	2,26892803	174	3,03687290
43	0,75049158	87	1,51843645	131	2,28638132	175	3,05432619
44	0,76794487	88	1,53588974	132	2,30383461	176	3,07177948

Gr.	Länge.	Gr.	Länge.	Gr.	Länge.	Gr.	Länge.
177	3,08923278	225	3,92699082	273	4,76474886	321	5,60250690
178	3,10668607	226	3,94444411	274	4,78220215	322	5,61996019
179	3,12413936	227	3,96189740	275	4,79965544	323	5,63741348
180	3,14159265	228	3,97935069	276	4,81710874	324	5,65486678
181	3,15904595	229	3,99680399	277	4,83456203	325	5,67232007
182	3,17649924	230	4,01425728	278	4,85201532	326	5,68977336
183	3,19395253	231	4,03171057	279	4,86946861	327	5,70722665
184	3,21140582	232	4,04916386	280	4,88692191	328	5,72467995
185	3,22885912	233	4,06661716	281	4,90437520	329	5,74213324
186	3,24631241	234	4,08407045	282	4,92182849	330	5,75958653
187	3,26376570	235	4,10152374	283	4,93928178	331	5,77703982
188	3,28121899	236	4,11897703	284	4,95673508	332	5,79449312
189	3,29867229	237	4,13643033	285	4,97418837	333	5,81194641
190	3,31612558	238	4,15388362	286	4,99164166	334	5,82939970
191	3,33357887	239	4,17133691	287	5,00909495	335	5,84685299
192	3,35103216	240	4,18879020	288	5,02654825	336	5,86430629
193	3,36848546	241	4,20624350	289	5,04400154	337	5,88175958
194	3,38593875	242	4,22369679	290	5,06145483	338	5,89921287
195	3,40339204	243	4,24115008	291	5,07890812	339	5,91666616
196	3,42084533	244	4,25860337	292	5,09636142	340	5,93411946
197	3,43829863	245	4,27605667	293	5,11381471	341	5,95157275
198	3,45575192	246	4,29350996	294	5,13126800	342	5,96902604
199	3,47320521	247	4,31096325	295	5,14872129	343	5,98647933
200	3,49065850	248	4,32841654	296	5,16617459	344	6,00393263
201	3,50811180	249	4,34586984	297	5,18362788	345	6,02138592
202	3,52556509	250	4,36332313	298	5,20108117	346	6,03883921
203	3,54301838	251	4,38077642	299	5,21853446	347	6,05629250
204	3,56047167	252	4,39822972	300	5,23598776	348	6,07374580
205	3,57792497	253	4,41568301	301	5,25344105	349	6,09119909
206	3,59537826	254	4,43313630	302	5,27089434	350	6,10865238
207	3,61283155	255	4,45058959	303	5,28834763	351	6,12610567
208	3,63028484	256	4,46804289	304	5,30580093	352	6,14355897
209	3,64773814	257	4,48549618	305	5,32325422	353	6,16101226
210	3,66519143	258	4,50294947	306	5,34070751	354	6,17846555
211	3,68264472	259	4,52040276	307	5,35816080	355	6,19591884
212	3,70009801	260	4,53785606	308	5,37561410	356	6,21337214
213	3,71755131	261	4,55530935	309	5,39306739	357	6,23082543
214	3,73500460	262	4,57276264	310	5,41052068	358	6,24827872
215	3,75245789	263	4,59021593	311	5,42797397	359	6,26573201
216	3,76991118	264	4,60766923	312	5,44542727	360	6,28318531
217	3,78736448	265	4,62512252	313	5,46288056		
218	3,80481777	266	4,64257581	314	5,48033385		
219	3,82227106	267	4,66002910	315	5,49778714		
220	3,83972435	268	4,67748240	316	5,51524044		
221	3,85717765	269	4,69493569	317	5,53269373		
222	3,87463094	270	4,71238898	318	5,55014702		
223	3,89208423	271	4,72984227	319	5,56760031		
224	3,90953752	272	4,74729557	320	5,58505361		

Tabelle B.

Verwandlung des Minutenmaßes in Theile des Halbmessers 1.

M.	Länge.	M.	Länge.	M.	Länge.	M.	Länge.
1	0,00029089	17	0,00494510	33	0,00959931	49	0,01425352
2	0,00058178	18	0,00523599	34	0,00989020	50	0,01454441
3	0,00087266	19	0,00552688	35	0,01018109	51	0,01483530
4	0,00116355	20	0,00581776	36	0,01047198	52	0,01512619
5	0,00145444	21	0,00610865	37	0,01076286	53	0,01541708
6	0,00174533	22	0,00639954	38	0,01105375	54	0,01570796
7	0,00203622	23	0,00669043	39	0,01134464	55	0,01599885
8	0,00232711	24	0,00698132	40	0,01163553	56	0,01628974
9	0,00261799	25	0,00727221	41	0,01192642	57	0,01658063
10	0,00290888	26	0,00756309	42	0,01221730	58	0,01687152
11	0,00319977	27	0,00785398	43	0,01250819	59	0,01716240
12	0,00349066	28	0,00814487	44	0,01279908	60	0,01745329
13	0,00378155	29	0,00843576	45	0,01308997		
14	0,00407243	30	0,00872665	46	0,01338086		
15	0,00436332	31	0,00901753	47	0,01367175		
16	0,00465421	32	0,00930842	48	0,01396263		

Tabelle C.

Verwandlung des Secundenmaßes in Theile des Halbmessers 1.

S.	Länge.	S.	Länge.	S.	Länge.	S.	Länge.
1	0,00000485	17	0,00008242	33	0,00015999	49	0,00023756
2	0,00000970	18	0,00008727	34	0,00016484	50	0,00024241
3	0,00001454	19	0,00009211	35	0,00016968	51	0,00024725
4	0,00001939	20	0,00009696	36	0,00017453	52	0,00025210
5	0,00002424	21	0,00010181	37	0,00017938	53	0,00025695
6	0,00002909	22	0,00010666	38	0,00018423	54	0,00026180
7	0,00003394	23	0,00011151	39	0,00018908	55	0,00026665
8	0,00003879	24	0,00011636	40	0,00019393	56	0,00027150
9	0,00004363	25	0,00012120	41	0,00019877	57	0,00027634
10	0,00004848	26	0,00012605	42	0,00020362	58	0,00028119
11	0,00005333	27	0,00013090	43	0,00020847	59	0,00028604
12	0,00005818	28	0,00013575	44	0,00021332	60	0,00029089
13	0,00006303	29	0,00014060	45	0,00021817		
14	0,00006787	30	0,00014544	46	0,00022301		
15	0,00007272	31	0,00015029	47	0,00022786		
16	0,00007757	32	0,00015514	48	0,00023271		

Mit Hülfe der Tabelle A, sind $10° = 0{,}17453293$
" " B, " $48' = 0{,}01396263$
" " C, " $24'' = 0{,}00011636$, folgl.
die Länge des Bogens φ in Theile d. H. $1 = 0{,}18861192$.

Daher ist der Ausdruck: $B.S.\frac{m}{n} = B.S.\frac{3}{16} = B.\varphi = 0{,}18861192$ Halbmesser.

II. Bestimmung des Bogens φ in Gradmaße, wenn die trigonometrische Funktion $\varphi = B.T.\sqrt{\frac{bx}{a-x}}$ unter der Bedingung ausgeübt werden soll, daß $a=15$, $b=4$ und $x=2$ ist.

1) Wenn die Tafeln, die trigonometrischen Linien ohne Logarithmen enthalten. Man suche das Gradmaß der Tangente:

$$\sqrt{\frac{bx}{a-bx}} = \sqrt{\frac{4\times 2}{15-4.2}} = T.\frac{8}{7} = 1{,}0690450$$

Zur Tangente 1,0690450 gehören 46° 54′ 40″

86233
103,88 | 4217,00 | 40″
4155 2
61 80

Es ist demnach $B.T.\sqrt{\frac{bx}{a-bx}} = B.T.T.\frac{7}{8}$ in Gradmaß $= 46° 54' 40'' = \varphi$.

Oder 2) Wenn in den Tafeln nur die Logarithmen der trigonometrischen Linien anzutreffen sind.

Der Logarithmen von T. $= 1{,}069045$ ist $= 0{,}0289777$
162
20,3
0,028995 9
+ 10,
10,028995 9

Zu dem Log. der T. = 10,9289959 gehören 46° 54′ 40″

8246

42,20 | 1713,00 | 40″
1688 0
25 00

Daher ist das Gradmaß des Bogens $\varphi = 46° 54' 40''$ und dasselbe nach vorstehenden Tabellen in Theilen des Halbmessers 1 ausgedrückt.

Nach Tabelle A. 46° = 0,80285146
„ „ B. 54′ = 0,01570796
„ „ C. 40″ = 0,00019393

daher B.T. $\left|\frac{bx}{a-bx}\right.$ = B.φ = 0,81875335 in Theilen des Halbmessers 1.

Verwandlung der Briggischen Logarithmen in natürliche.

§. 4.

Der natürliche Logarithme einer Zahl wird erhalten, wenn man den Briggischen derselben, mit dem Modul 2,302585 multiplicirt. In der Folge sollen die Briggischen Logarithmen mit Log. und die natürlichen mit L. bezeichnet werden.

Wäre z. B. der natürliche Logarithme der Zahl 5,79346 zu finden; so suche man den Briggischen in den Tafeln auf und multiplicire selbigen mit dem Modul 2,302585. Am besten ist solches nach der verkürzten Multiplication (Zahlenrechnung §. 19.) zu verrichten. Es ist nämlich:

Log. 5,79346 = 0,7629335

45

0,7629380 |
Modul = 2,302585 |
1,5258760 |
2288814 | 0
15258 | 6
3814 | 5
609 | 6
38 | 0

L. 5,79346 = 1.7567295

Mithin ist der natürliche Logarithme der Zahl 5,79346 = 1,7567295.

Sollte im entgegengesetzten Falle zu dem natürlichen Logarithmen einer gegebenen Zahl der Briggsche gefunden werden; so multiplicire man ersteren mit dem Modul 0,4342945.

Es ist z. B. der natürliche Logarithme von der Zahl 2 = 0,69314718; folglich der Briggische Logarithme dieser Zahl: 0,69314718 × 0,4342945, nach der verkürzten Multiplication ausgeübt:

0,69314718	
0,4342945	
0,277258872	
20794415	4
2772588	4
138629	4
62382	6
2772	4
336	5

Briggischer Logarithme der Zahl 2 = 0,301030007

Von den Kegelschnitten.

§. 5.

Die Entstehung der Kegelschnitte; die Lage und Benennung ihrer Linien und Punkte; so wie die bildliche Darstellung derselben, sind in der, bei Leopold Voß in Leipzig herausgekommenen construirenden Geometrie, von §. 127. bis §. 153. enthalten, und werden für gegenwärtigen Zweck als bekannt vorausgesetzt.

Um in der Folge keiner weitern Erläuterung zu bedürfen, so mögen die zur Berechnung der Kegelschnitte nothwendigen Bezeichnungen ihrer Dimensionen, hier vorangehen.

1) Für die Parabel Fig. 1.

sei die Entfernung des Brennpunktes F von dem Scheitelpunkte A, das ist AF = c;
der Parameter HI = p;
jede Abscisse, wie AG und AK ꝛc. = x;

technischen Bildungsanstalt, Herrn Johann Andreas Schubert, für die willfährige und sorgfältige Unterstützung zu danken, mit welcher sich derselbe des, aus den Berechnungen hervorgehenden mühsamen Auftragens der Figuren, zum Besten des Werks, unterzogen hat.

Dresden, im September 1828.

Der Verfasser.

jedes beliebigen Punktes der Parabel von der Axe gefunden werden. So ist z. B.

Die Gleichung der Parabel, wenn die Entfernung des Brennpunktes vom Scheitelpunkte $= c$ als bekannt angenommen wird:

(A) $y = \sqrt{4cx}$ oder wenn der Parameter der Parable gegeben ist:

(B) $y = \sqrt{px}$.

1ste Aufgabe.

Welche Entfernung in Fig. 1, hat der Punkt B einer Parabel von der Axe AN, wenn die Entfernung des Brennpunktes, vom Scheitelpunkte $=$ AF $= c = 16$ Zoll, und die dem zu suchenden Punkte zugehörige Abscisse AK $= x = 3$ Ellen 20 Zoll ist.

Auflösung.

$c = 16$ Zoll $= \frac{2}{3}$ Elle;
$x = 3$ Ellen 20 Zoll $= 3\frac{5}{9}$ Elle.

$$y = \sqrt{4cx}$$
$$y = \sqrt{4 \times \tfrac{2}{3} \times 3\tfrac{5}{9}}$$
$$y = \sqrt{10{,}222222} = 3{,}197 \text{ Ellen} = 3 \text{ Ellen } 3{,}72 \text{ Zoll.}$$

2te Aufgabe.

Es soll die Entfernung eines Punktes der Parabel von der Axe AN gefunden werden, deren Parameter HI, Fig. 1, $= p = 20$ Zoll und die dem Punkte B zugehörige Abscisse KB $= x = 2$ Ellen beträgt.

Auflösung.

$p = 20$ Zoll $= \frac{5}{9}$ Elle.
$x = 2$ Ellen.

$$y = \sqrt{px}$$
$$y = \sqrt{\tfrac{5}{9} \times 2}$$
$$y = \sqrt{1{,}666666} = 1{,}291 \text{ Ellen} = 1 \text{ Elle } 6{,}98 \text{ Zoll.}$$

3te Aufgabe.

Der Parameter HI = p der Parabel Fig. 1, soll bestimmt werden, wenn die Abscisse AK = x = 1 Elle 12 Zoll und die ihr zugehörige Ordinate BK = y = 1 Elle 18 Zoll als gegeben betrachtet wird.

Auflösung.

x = 1 Elle 12 Zoll = $1\frac{1}{2}$ Elle.
y = 1 Elle 18 Zoll = $1\frac{3}{4}$ Elle.

$$p = \frac{y^2}{x}$$

$$p = \frac{(1\frac{3}{4})^2}{1\frac{1}{2}} = 2{,}041 \text{ Elle} = 2 \text{ Ellen } 0{,}98 \text{ Zoll.}$$

4te Aufgabe.

Wie groß ist die Entfernung des Brennpunktes = AF = c Fig. 1, vom Scheitelpunkte der Parabel, wenn eine Abscisse z. B. AK im Maße = x = 4′ 5″ und die ihr zugehörige Ordinate BK = y = 9′ 8″ Decimalmaß gefunden worden ist.

Auflösung.

x = 4′ 5″ = 4,5′.
y = 9′ 8″ = 9,8′.

$$c = \frac{y^2}{4x}$$

$$c = \frac{(9{,}8')^2}{4.(4{,}5')} = 5{,}335' = 5' \; 3{,}35'',$$

Anmerk. Durch Anwendung dieser Gleichung kann, mittelst des Halbmessers vom Umfange eines paraboloischen Brennspiegels und der ihm zugehörigen Abscisse, die Entfernung des Brennpunktes vom Scheitelpunkte, durch Rechnung gefunden werden.

5te Aufgabe.

Die Länge der Tangente = T. eines Punktes B der Parabel Fig. 1, ist zu bestimmen, deren Parameter HI = p = 12′ 4″ und die Abscisse BK dieses Punktes = x = 8′ beträgt.

Auflösung.

$x = 8'$.
$p = 12' 4'' = 12{,}4'$.

$$T. = \sqrt{x(4x+p)}$$
$$T. = \sqrt{8.(4\times 8+12{,}4)}$$
$$T. = \sqrt{355{,}2} = 18{,}846' = 18' 8{,}46''$$

Anmerk. Die Subtangente eines Punktes der Parabel ist gleich seiner doppelten Abscisse $= 2x$. Die Subnormale jedes Punktes der Parabel ist eine beständige Größe und gleich dem halben Parameter $= \frac{1}{2}p = \frac{p}{2}$. und die Normale jedes Punktes einer Parabel $= \sqrt{p(x+\frac{1}{4}p)}$.

6te Aufgabe.

Aus dem Parameter $= p = 2$ Ellen und der gegebenen Ordinate, eines Punktes der Parabel, $BC = 8$ Ellen Fig. 4, soll die Länge des ihr zugehörigen Bogens $AB = z$ vom Scheitelpunkte aus gefunden werden.

Auflösung.

$p = 2$ Ellen.
$y = 8$ Ellen.

$$z = \frac{y}{2p}\sqrt{p^2+4y^2} + \tfrac{1}{4}p.L.\left[\frac{2y+\sqrt{p^2+4y^2}}{p}\right]$$
$$z = \frac{8}{2.2}\sqrt{2^2+4.8^2} + \tfrac{1}{4}.2.L.\left[\frac{2.8+\sqrt{2^2+4.8^2}}{2}\right]$$
$$z = 2\sqrt{260} + \tfrac{1}{2}.L.[16{,}0622]$$
$$z = 2\times 16{,}1245 + \tfrac{1}{2}.L.[16{,}0622]$$
$$(A)\ z = 32{,}2490 + \tfrac{1}{2}.L.[16{,}0622].$$

Log. 16,0622 = 1,2057996
54
1,2058050
Modul = 2,302585
2,4116100
3617415 0
24116 0
6029 0
964 0
60 0

Natürlicher Log. d. i. L. 16,0622 = 2,7764684
folglich $\frac{1}{2}$ L. 16,0622 = 1,3882342

Diesen Werth in (A) substituirt ist:

z = 32,2490 + 1,3882
z = 33,6372 Ellen = 33 Ellen 15,2928 Zoll.

7te Aufgabe.

Das Profil eines parabolischen Gewölbes habe zum Parameter HI Fig. 1, = p = 4 Ellen und zur Höhe AK = x = 6 Ellen, wie viel Ellen beträgt die Länge der parabolischen Linie BAC des Gewölbes.

Auflösung.

p = 4 Ellen.
x = 6 Ellen.

Die Länge der Parabel

$$\overset{\frown}{BAC} = \sqrt{px+4x^2} + \frac{p}{4} L.\left(\frac{8x+p+4\sqrt{px+4x^2}}{p}\right)$$

$$\overset{\frown}{BAC} = \sqrt{(4\times6+4\times6^2)} + \frac{4}{4} L.\left(\frac{8\times6+4+4\sqrt{(4\times6+4\times6^2)}}{4}\right)$$

$$\overset{\frown}{BAC} = \sqrt{(168)} + L.\left(\frac{52+4\sqrt{168}}{4}\right)$$

(A.) $\overset{\frown}{BAC}$ = 12,9614 + L. (25,9614).

Ausübung nach §. 4.

Log. 25,9614 = 1,4143214
67
1,4143281
Modul = 2,302585
2,8286562
4242984 3
28286 4
7071 5
1131 2
70 5
L. 25,9614 = 3,2566106

Diesen Werth in die Gleichung (A.) substituirt, erhält man für den paraboliſchen Bogen:

$\overset{\frown}{BAC} = 12{,}9614 + 3{,}2566106 = 16{,}218$ Elle = 16 Ell. 5 Z 2 Z 3 Zoll.

Anmerk. Sollte die Entfernung c des Brennpunktes vom Scheitelpunkte, statt des Parameter = p gegeben sein; so setze man 4c statt p in vorstehende Gleichung, und sie wird zu:

$$\overset{\frown}{BAC} = \sqrt{4x(c+x)} + c \cdot L.\left[\frac{2x + c + \sqrt{4x(c+x)}}{c}\right]$$

8te Aufgabe.

Bekanntlich beschreibt ein in schiefer Richtung geworfener Körper im luftleeren Raume eine Parabel.

Es sei deßhalb der Richtungswinkel LBC Fig. 1., unter welchen der Körper geworfen worden ist $= \alpha = 40°$ und die dadurch erlangte Wurfweite BC = 480 Ellen; wie viel Ellen beträgt die paraboliſche Linie BAC, welche der geworfene Körper beſchrieben hat.

Auflöſung.

$\alpha = 40°$
a = 480 Ellen.

$$\overset{\frown}{BAC} = \frac{a}{2}\left[\sqrt{1+(T.a)^2} + L.\left[\frac{T.a+\sqrt{1+(T.a)^2}}{T.a}\right]\right]$$

$$\overset{\frown}{BAC} = \frac{480}{2}\left[\sqrt{1+(T.40°)^2} + L.\left[\frac{T.40°+\sqrt{1+(T.40°)^2}}{T.40°}\right]\right]$$

$$(\text{A.})\overset{\frown}{BAC} = 240\left[\sqrt{1+(T.40°)^2} + L.\left[\frac{T.40°+\sqrt{1+(T.40°)^2}}{T.40°}\right]\right]$$

Ausübung.

Log. T.40° = 0,9238135 — 1; hierzu ist die Zahl 0,8391
Log.$(T.40°)^2$ = 0,8476270 — 1 : : : : 0,70408
daher $\sqrt{1+(T.40°)^2} = \sqrt{1,70408}$ = 1,3054 (B.)
T.40° = 0,8391
$[T.40°+\sqrt{1+(T.40°)^2}]$ = 2,1445

Nun ist Log.$[T.40°+\sqrt{1+(T.40°)^2}]$ = Log. 2,1445 = 0,3313261
Modul 2,302585
0,6626522
993978 | 3
6626 | 4
1656 | 5
261 | 8
16 | 5
L.$[T.40°+\sqrt{1+(T.40°)^2}]$ = 0,7629064

Um den Ausdruck L. $\frac{[T.40°+\sqrt{1+(T.40)^2}]}{T.40°}$ am bequemsten aufzulösen, suche man zu den natürlichen Logarithmen 0,7629064, so wie zu der Tangente von 40° den Briggischen Logarithmen, und subtrahire diesen von jenem.

Es ist nämlich Log. 0,7629064 = 0,8824676 — 1

$$\begin{array}{rrr} & & 34 \\ & & 4{,}6 \\ \hline + & 1 & -1 \\ & 0{,}8824715 & -1 \\ \text{Log. T.}40^\circ = & 0{,}9238135 & -1 \\ - & & + \\ \hline & 0{,}9586580 & -1 \end{array}$$

, hierzu gehört die Zahl 0,909197 (C.).

Diese gefundenen Werthe von (B.) und (C.) substituire man in (A.) und man erhält:

$\overset{\frown}{BAC} = 240\,[1{,}3054 + 0{,}90919] = 240 \times 2{,}2146 = 531{,}5$ Elle = 531 Ellen 12 Zoll.

9te Aufgabe.

Welche Höhe AK Fig. 1 wird der Körper in dem parabolischen Wurfe, vorhergehender Aufgabe, erreicht haben.

Auflösung.

a = 480 Ellen.
$\alpha = 40^\circ$.

$$AK = \frac{a.\,T.\alpha}{4}$$

$$AK = \frac{480.T.40^\circ}{4}$$

$$AK = 120.T.40^\circ$$

Ausübung.

Log. $T.40^\circ$ = 0,9238135 — 1
Log. 120 = 2,0791812
Log. $120.T.40^\circ$ = 2,0029947. Hierzu gehört die Zahl:
100,69 Ellen = 100 Ellen 16,56 Zoll.

10te Aufgabe.

Wie viel Quadratellen wird die parabolische Fläche BAC Fig. 1 enthalten, wenn die Abscisse AK = x = 10 Ellen

16 Zoll, und die ihr zugehörige Ordinate BK = y = 8 Ellen 12 Zoll beträgt?

Auflösung.

$x = 10\frac{2}{3}$ Elle.

$y = 8\frac{1}{2}$ Elle.

$$\text{Fläche BAC} = \frac{4xy}{3}$$

$$\text{Fläche BAC} = \frac{4 . 10\frac{2}{3} . 8\frac{1}{2}}{3}$$

BAC = $120\frac{8}{9}$ □Elle = 120 □Ellen 512 □Zoll.

11te Aufgabe.

Es soll der Flächeninhalt eines Theiles der Parabel z. B. BDEC Fig. 1 gefunden werden, welcher zwischen den beiden Chorden DE und BC enthalten ist. Die Entfernung der Chorde DE vom Scheitelpunkte A, das ist AG, sey = c = 3 Ellen 6 Zoll; die Abscisse AK = x = 5 Ellen 20 Zoll; wie viel Quadratellen enthält der Theil BDEC der Parabel?

Auflösung.

$c = 3\frac{1}{4}$ Elle.

$x = 5\frac{3}{4}$ Elle.

$p = 1\frac{1}{6}$ Elle.

$$\text{Fläche BDEC} = \tfrac{4}{3}\left[(c+x)\sqrt{p(c+x)} - c\sqrt{pc}\right]$$

$$\text{BDEC} = \tfrac{4}{3}\left[(3\tfrac{1}{4}+5\tfrac{3}{4})\sqrt{1\tfrac{1}{6}(3\tfrac{1}{4}+5\tfrac{3}{4})} - 3\tfrac{1}{4}\sqrt{1\tfrac{1}{6}.3\tfrac{1}{4}.}\right]$$

$$(\text{A.})\ \text{BDEC} = \tfrac{4}{3}\left[9.\sqrt{16\tfrac{1}{2}} - \tfrac{13}{4}\sqrt{5\tfrac{23}{24}}\right].$$

Ausübung.

Log. $5\frac{23}{24}$ = Log. $\frac{143}{24}$ =	2,1553360	Log. 13 =	1,1139434
	1,3802112	4 =	0,6020600
	0,7751248		0,5118834
	:2) 0,3875624		
Log. $\frac{13}{4}$ =	0,5118834		

Log. $\frac{13}{4}\sqrt{5\frac{23}{24}}$ = 0,8994468 hierzu gehört 7,9337.

29

39

Log. $\sqrt[3]{16\frac{1}{2}}$ = Log. $\sqrt[3]{16,5}$ = 1,2174839

: 2) 0,6087419

Log. 9 = 0,9542425

1,5629844; hierzu gehört 36,5582

24

20

Diese Werthe in (A.) substituirt geben:

BDCE = $\frac{4}{3}$ [36,5582 — 7,9337]

BDCE = $\frac{4}{3}$ [28,6245]

BDCE = 38,1660 □Ellen = 38 □Ellen 95,616 □Zoll.

Aufgaben

den körperlichen Inhalt und die Oberfläche eines paraboliſchen Conoid's betreffend.

§. 7.

Wenn ſich die Hälfte einer Parabel, z. B. der Schenkel AB Fig. 5, um ihre Axe AD kreisförmig herum bewegt; ſo wird durch dieſe Bewegung ein körperlicher Raum beſchrieben, welcher ein paraboliſches Conoid genannt wird.

12te Aufgabe.

Wie viel beträgt der körperliche Inhalt M eines paraboliſchen Conoids, (z. B. eines auf dieſe Weiſe ausgehöhlten Keſſels) deſſen ſenkrechte Tiefe oder Abſciſſe AD = x = $4\frac{1}{2}$ Werkfuß und der Durchmeſſer BC oder die doppelte Abſciſſe = 2y = 6 Werkfuß iſt? Fig. 5.

Auflöſung.

AD = x = $4\frac{1}{2}$'.

BD = y = 3'.

$M = 1,5708 . xy^2$

$M = 1,5708 . 4\frac{1}{2} . 9.$

M = 63,617 Kub. Wf. = 63 K. Wf. 1066,8 K. Zoll.

13te Aufgabe.

Welcher Durchmeſſer BC muß einem paraboliſchen Conoid gegeben werden, wenn deſſen Höhe oder Abſciſſe AD, Fig. 5 =

$x = 2$ Ellen 4 Zoll und der körperliche Inhalt $M = 4$ Kubik-Ellen betragen soll?

Auflösung.

$x = 2\frac{1}{3}$ Elle.
$M = 4$ K. Ellen.
$2BD = BC = 2y$

$$BC = 1{,}5957 \cdot \sqrt{\frac{M}{x}}$$

$$BC = 1{,}5957 \cdot \sqrt{\frac{4}{2\frac{1}{3}}}$$

$BC = 2{,}1681$ Elle $= 2$ Ellen 4,03 Zoll.

14te Aufgabe.

Der körperliche Inhalt eines paraboliſchen Conoid's Fig. 5, ſei $= M = 40$ Kubik-Werkfuß und ſein Durchmeſſer $BC = 8$ Werkfuß; es ſoll ſeine Höhe oder Abſciſſe $AD = x$ beſtimmt werden.

Auflöſung.

$M = 40$ K. W. F.
$BC = 8$ W. F., folgl.
$BD = y = 4$ W. F.

$$x = 0{,}6366\frac{M}{y^2}$$

$$x = 0{,}6366 \cdot \frac{40}{16}$$

$x = 1{,}5915$ W. F. $= 1$ W. F. 7,09 Z.

15te Aufgabe.

Ein paraboliſch gekrümmtes Tonnengewölbe Fig. 6, habe zur Höhe oder Abſciſſe $AD = x = 6$ Ellen 20 Zoll; zur unteren Chorde BC, d. i. zur doppelten Ordinate, $= 2y = 16$ Ellen und zur Länge $CE = a = 36$ Ellen; wie viel Kubik-Ellen beträgt ſein körperlicher Inhalt M?

Auflöſung.

$AD = x = 6\frac{1}{3}$ Elle.

BD = y = 8 Ellen.
CE = a = 36 Ellen.

$$M = \frac{4axy}{3}$$

$$M = \tfrac{4}{3} \times 36 \times 6\tfrac{1}{2} \times 8$$

$$M = 2624 \text{ Kub. Ellen.}$$

16te Aufgabe.

Die Höhe eines paraboliſch gewölbten Brückenbogens, Fig. 6, ſei AD = x = 16 Ellen; ſeine untere Breite BC = 2y = 20 Ellen; ſeine Tiefe CE = a = 12 Ellen. Das Waſſer iſt in ſelbigem bis zum Punkte G angewachſen, ſo daß für AG = c nur 4 Ellen übrig geblieben ſind. Wie viel Kub. Ellen Waſſer enthält der innere Raum BFHCEIK = M?

Auflöſung.

x = 16 Ellen.
y = 10 „
a = 12 „
c = 4 „

$$M = \tfrac{4}{3} ay \left[(c+x) \sqrt{\frac{c+x}{x}} - c \sqrt{\frac{c}{x}} \right]$$

$$M = \tfrac{4}{3} . 12 . 10 \left[(4+16) \sqrt{\frac{4+16}{16}} - 4 \sqrt{\frac{4}{16}} \right]$$

$$M = 160 \left[\frac{20 . \sqrt{5}}{2} - (4 \times \tfrac{1}{2}) \right]$$

$$M = 160 \left[22{,}3606 - 2 \right]$$

$$M = 160 . 20{,}3606 = 3257{,}6 \text{ Kub. Elle Waſſer.}$$

17te Aufgabe.

Wie viel Quadrat-Werkfuß beträgt die innere Fläche = S. eines paraboliſch ausgehöhlten Gefäßes, deſſen Durchmeſſer, d. i. ſeine doppelte Ordinate, BC Fig. 7 = 2y = 8 Werkfuß; ſeine Tiefe oder Abſciſſe DA = x = 2 Werkfuß iſt?

Auflösung.

Nach §. 6 (B.) ist $y = \sqrt{px}$ und $y^2 = px$ folgl. $\frac{y^2}{x} = p$

$y = 4$ F.
$x = 2$ F. } daher $p = \frac{y^2}{x} = \frac{16}{2} = 8$ Fuß.

$$S = 0{,}5236 \left[\frac{1}{p}\sqrt{(4y^2 + p^2)^3} - p^2\right]$$

$$S = 0{,}5236 \left[\tfrac{1}{8}\sqrt{(4.16 + 64)^3} - 64\right]$$

$$S = 0{,}5236 \left[\tfrac{1}{8}\sqrt{(128)^3} - 64\right]$$

$$S = 0{,}5236\ (181{,}019 - 64)$$

$S = 0{,}5236 \times 117{,}019 = 61{,}2712$ □W. F. = 61 □W. F. 39,05 □Z.

Anmerk. Wenn die Coordinaten eines paraboliſchen Conoids gegeben ſind und der Parameter in der Aufgabe nicht vorkommt, ſo zeigt die folgende Aufgabe die dazu gehörige Formel.

18te Aufgabe.

Ein kreisförmig erbauter Salon habe eine paraboliſch gewölbte Kuppel, deren Halbmeſſer oder Ordinate BD, Fig. 5 = $y = 9$ Ellen und die Höhe oder Abſciſſe der Kuppel = AD = $x = 6$ Ellen iſt; wie viel Quadratellen beträgt die innere Fläche = S derſelben?

Auflösung.

$x = 6$ Ellen.
$y = 9$ Ellen.

$$S = 0{,}5236 \left[\frac{1}{x^2\ y^2}\sqrt{(4x^2\ y^2 + y^4)^3} - \frac{y^4}{x^2}\right]$$

$$S = 0{,}5236 \left[\frac{1}{36 \times 81}\sqrt{(4.36.81 + 6561)^3} - \frac{6561}{36}\right]$$

$$S = 0{,}5236 \left[\frac{1}{2916}\sqrt{(18225)^3} - \frac{729}{4}\right]$$

$$S = 0{,}5236\ [843{,}75 - 182{,}25]$$

$$S = 0{,}5236 \times 661{,}5$$

$S = 346{,}361$ □Elle = 346 □Ellen 207,93 □Zoll.

19te Aufgabe.

Ein paraboliſches Tonnen-Gewölbe Fig. 6 habe zur Höhe, das iſt zur Abſciſſe, $AD = x = 8$ Ellen; zur Chorde BC, das iſt zur doppelten Ordinate, $2y = 18$ Ellen und zur Länge $CE = 40$ Ellen; wie viel Quadratellen enthält die dadurch gebildete innere Fläche $= F$?

Auflöſung.

$a = 40$ Ellen.
$x = 8$ Ellen.
$y = 9$ Ellen.

$$F = a\left[\sqrt{(y^2+4x^2)} + \frac{y^2}{4x} L.\left(\frac{8x^2+y^2+4x\sqrt{y^2+4x^2}}{y^2}\right)\right]$$

$$F = 40\left[\sqrt{(81+4.64.)} + \frac{81}{4.8} L.\left(\frac{8.64+81+4.8\sqrt{81+4.64}}{81}\right)\right]$$

$$F = 40\left[\sqrt{337} + \frac{81}{32} L.\left(\frac{593+32\sqrt{337}}{81}\right)\right]$$

$$(A.)\ F = 40\left[18{,}357 + \frac{81}{32} L.\left[\frac{1180{,}4419}{81}\right]\right]$$

Ausübung.

Log. 1180,4419 = 3,0720290
147
3,7
3,31
3,0720444
Log. 81 = 1,9084850
Log. $\left[\frac{1180{,}4419}{81}\right]$ = 1,1635594
Modul = 2,302585
2,3271188
3490678 2
232710
58175
9304
580

$$L.\left[\frac{1180{,}4419}{81}\right] = 2{,}6791943$$

Man suche nunmehr zu den natürlichen Logarithmen 2,6791943 den Briggischen und übe $\frac{81}{32}$. L. $\left(\frac{1180,4419}{81}\right)$ logarithmisch aus. Es ist nämlich:

Log. 2,6791943 = 0,4279889
146
6,5
0,49
0,4280042
Log. 81 = 1,9084850
2,3364892
Log. 32 = 1,5051500
0,8313392 hierzu ist die Zahl = 6,7816

Wenn dieser Werth in (A.) substituirt wird erhält man:

$F = 40\,[18,357 + 6,7816]$

$F = 40 \cdot 25,1386$

$F = 1005,544$ □Ellen = 1005 □Ellen 313,2 □Zoll.

Aufgaben,
die sich auf Bestimmung einzelner Punkte und Linien der Ellipse beziehen.

§. 8.

20ste Aufgabe.

Es sei in Fig. 2 die halbe große Axe = AC = CB = a = 12 Ellen; die Excentricität CF = CF = c = 8 Ellen und die Abscisse CK vom Mittelpunkte C aus = x = 4 Ellen 12 Zoll, gegeben; es soll der ihr zugehörige Punkt G oder was gleich viel ist, die Ordinate KG = y gefunden werden.

Auflösung.

a = 12 Ellen.
c = 8 Ellen.
x = 4 Ellen.

$$y = \frac{\sqrt{(a^2 - x^2)(a^2 - x^2)}}{a^2}$$

$$y = \frac{\sqrt{(144 - 64)(144 - 16)}}{144}$$

$$y = \frac{\sqrt{640}}{9}$$

$y = 8{,}4327$ Ellen $= 8$ Ellen $10{,}384$ Zoll.

21ste Aufgabe.

An einer Ellipse sei der Anfangspunkt der Abscissen im Endpunkte A der großen Axe Fig. 2; die halbe große Axe $AC = CB = a = 18$ Zoll; die halbe kleine Axe $CD = CE = b = 12$ Zoll; welche Entfernung hat der Punkt G von der großen Axe, oder, welches gleich viel ist, welche Länge hat die Ordinate $KG = y$, die der Abscisse $AK = x = 10$ Zoll zugehört?

Auflösung.

$a = 18$ Zoll.
$b = 12$ Zoll.
$x = 10$ Zoll.

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{2ax - x^2}$$

$$y = \frac{12}{18}\sqrt{2.18.10 - 10^2}$$

$y = \frac{2}{3}\sqrt{260} = 10{,}749$ Ellen $= 10$ Ell. $17{,}97$ Z.

22ste Aufgabe.

Es soll der Parameter $HI = p$ der Ellipse Fig. 2 aus der halben großen Axe $AC = a = 4$ Ellen 6 Zoll, und der halben kleinen Axe $CD = b = 2$ Ellen 20 Zoll gefunden werden.

Auflösung.

$a = 4\frac{1}{2}$ Elle.
$b = 2\frac{5}{6}$ Elle.

$$p = \frac{2b^2}{a}$$

$$p = \frac{2.(2\frac{5}{6})^2}{4\frac{1}{2}}$$

$p = 3\frac{7}{9}$ Elle $= 3$ Ellen $18\frac{2}{3}$ Zoll.

23ste Aufgabe.

Aus der halben großen Axe AC Fig. 2 = a = 6 Ellen, ferner aus einer gemessenen Abscisse CK = x = 3 Ellen, vom Mittelpunkte C aus, und der ihr zugehörenden Ordinate KG = y = 2 Ellen 12 Zoll, der Ellipse, soll die Excentricität CF = c bestimmt werden.

Auflösung.

a = 6 Ellen.
x = 3 Ellen.
y = $2\frac{1}{2}$ Elle.

$$c = a\sqrt{\frac{a^2-(x^2+y^2)}{(a+x)(a-x)}}$$

$$c = 6\sqrt{\frac{36-(9+6\frac{1}{4})}{(6+3)(6-3)}} = 6\sqrt{\frac{20\frac{3}{4}}{27}} \text{ und}$$

$$c = 6.0{,}87665 = 5{,}26 \text{ Elle} = 5 \text{ Ell. } 6{,}2 \text{ Z.}$$

24ste Aufgabe.

Es soll die Entfernung des Punktes G, das ist die Ordinate KG, der Ellipse Fig. 2 unter der Bedingung gefunden werden, daß der Anfangspunkt der Abscissen im Endpunkte A der großen Axe angenommen, ferner die ganze große Axe AB = a = 8 Werkfuß; die Abscisse AF = x = 2 Fuß 8 Zoll, und der Parameter HI = p = 6 Fuß gegeben ist.

Auflösung.

a = 8 Werkfuß.
p = 6 "
x = $2\frac{2}{3}$ "

$$y = \sqrt{p\left(x-\frac{x^2}{a}\right)}$$

$$y = \sqrt{6\left(2\tfrac{2}{3}-\frac{(2\frac{2}{3})^2}{8}\right)}$$

$$y = \sqrt{6\left(\frac{8}{3}-\frac{8}{9}\right)}$$

$$y = \sqrt{6.\frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{32}{3}} = 3{,}266 \text{ W.F.} = 3 \text{ W.F. } 3{,}2 \text{ Zoll.}$$

Anmerk. Zuweilen erfordert es die Nothwendigkeit, die kleine Axe einer Ellipse zur Abscissenlinie anzunehmen; deßhalb mögen auch hier einige Aufgaben unter dieser Bedingung folgen.

25ste Aufgabe.

Die halbe große Axe AC Fig. 2 sei $= a = 1$ Elle; die halbe kleine Axe $CD = b = 20$ Zoll. Der Anfangspunkt der Abscissen sei im Mittelpunkte C und CL, die auf der kleinen Axe angenommene Abscisse $= x = 16$ Zoll; welche Entfernung hat der Punkt M von der kleinen Axe, oder welches gleich viel ist, welche Länge hat die Ordinate $LM = y$?

Auflösung.

$a = 1$ Elle.
$b = \frac{5}{6}$ "
$x = \frac{2}{3}$ "

$$y = \frac{a}{b}\sqrt{(b+x)(b-x)}$$

$$y = \frac{1}{\frac{5}{6}}\sqrt{(\tfrac{5}{6}+\tfrac{2}{3})(\tfrac{5}{6}-\tfrac{2}{3})}$$

$$y = \tfrac{6}{5}\sqrt{(1\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{6})} = \tfrac{6}{5}\sqrt{\tfrac{1}{4}} = \tfrac{6}{5}\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{5} \text{ Elle} = 14{,}4 \text{ Zoll.}$$

26ste Aufgabe.

Der Anfangspunkt der Abscissen möge im Endpunkte D der kleinen Axe Fig. 2, ferner die halbe große Axe $AO = a = 3{,}2$ Fuß; die halbe kleine Axe $OD = b = 2{,}1$ Fuß und die Abscisse $DL = x = 0{,}8$ Fuß Decimalmaß gegeben sein; welche Länge hat die Ordinate $LM = y$?

Auflösung.

$a = 3{,}2'$
$b = 2{,}1'$
$x = 0{,}8'$

$$y = \frac{a}{b}\sqrt{(2b-x)x}$$

$$y = \frac{3{,}2}{2{,}1}\sqrt{(2\cdot 2{,}1 - 0{,}8)\,0{,}8}$$

$$y = \frac{3{,}2}{2{,}1}\sqrt{2{,}72} = 2{,}513' = 2' 5{,}13''.$$

§. 9.

Die Bestimmung der Länge des Quadranten, so wie des ganzen Umfangs einer Ellipse, kann für gegenwärtigen Zweck mit hinreichender Genauigkeit durch folgende Annäherungsmethode geschehen:

Es sei ABC Fig. 8, der Quadrant einer Ellipse. Man denke sich in den Bogen AB mehrere Punkte D, F, H, K ꝛc. und zwar in einer solchen Entfernung von einander, daß die auf ihre Tangenten gezogenen Normalen DE, FG, HI, KL ꝛc. die Axe AC, unter nicht allzu großen und nach ihrem Grademaße in arithmetischer Progression α, 2α, 3α, 4α ꝛc. wachsenden Winkeln, schneiden. Es sei z. B. $\angle AED = \alpha$; $\angle AGF = 2\alpha$ ꝛc.; je kleiner α als ein aliquoter Theil von 90° angenommen wird, desto mehr nähert man sich der Richtigkeit.

Um die im nachstehenden allgemeinen Ausdrucke enthaltenen Cosinus für β, β', β'' ꝛc. zur Längenbestimmung des elliptischen Quadranten zu erhalten, finde man zuvörderst die Sinus dieser Bogen. Es ist nämlich $S.\beta = \frac{S.\alpha\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$; $S.\beta' = \frac{S.2\alpha\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$; $S.\beta'' = \frac{S.3\alpha\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$; $S.\beta''' = \frac{S.4\alpha\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ ꝛc. Wird die Länge des Quadranten $= Q$ gesetzt, so erhält man sodann:

$$Q = 0{,}2618\left[\tfrac{3}{4} + S.\beta + S.\beta' + S.\beta'' + S.\beta''' \ldots\right]$$

27ste Aufgabe.

Es soll der $\angle \alpha = 15°$, $\angle 2\alpha = 30°$, $\angle 3\alpha = 45°$ ꝛc.; die halbe große Axe der Ellipse AC Fig. 8, $= a = 1$ Elle; und die halbe kleine Axe BC $= b = \frac{1}{2}$ Elle seyn; welche Länge hat der Bogen des Quadranten; welche Länge die halbe und welche die ganze Ellipse in ihrem Umfange?

Auflösung.

$\alpha = 15°$
$a = 1$ Elle.
$b = \frac{1}{2}$ "

Wenn Q die Länge des elliptischen Quadranten bezeichnet, so ist:

$$Q = 0{,}2618\,[\tfrac{3}{4} + \text{S.}\beta + \text{S.}\beta' + \text{S.}\beta'' + \text{S.}\beta''' \ldots .]$$

1) Bestimmung des Sinus β nach der Formel $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$. S.α = S.β und hieraus die Bestimmung vom S.β

$$\text{S.}\beta = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\,\text{S.}\alpha = \frac{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}{1}.\ \text{S.}15° = \frac{\sqrt{3}}{2}.\ \text{S.}15°.$$

Log. 3 = 0,4771213

$+1 \quad -1$

: 2) 0,2385606

Log. 2 = 0,3010300

0,9375306 − 1

Log. S.15° = 9,4129962

S.β = 9,3505268, hierzu ist das Gradmaß = 12° 57′ 9″

4432

91,51 | 836,00 | 9″

Der Log. S.β für den Sinustotus 1 ist demnach:

Log. S. 12° 57′ 9″ = 9,9888113 − 10

− 43

Diff. 1″ = 4,84 — 9,9888070 − 10

9 — 0,9888070 − 1 = 0,974556 = S.β

43,56 — 8041

29

Auf dieselbe Weise findet man 2):

$$\text{S.}\beta' = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}.\ \text{S.}2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}.\ \text{S.}30°$$

$$\text{S.}\beta'' = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}.\ \text{S.}3\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}.\ \text{S.}45°$$

$$\text{S.}\beta''' = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}.\ \text{S.}4\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}.\ \text{S.}60°$$

$$\text{S.}\beta'''' = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}.\ \text{S.}5\alpha = \frac{\sqrt{8}}{2}.\ \text{S.}75°;$$ und es sind die aufeinander folgenden Werthe von der ersten Berechnung an:

$\mathfrak{S}.\beta = 0{,}974586$
$\mathfrak{S}.\beta' = 0{,}901388$
$\mathfrak{S}.\beta'' = 0{,}790571$
$\mathfrak{S}.\beta''' = 0{,}661439$
$\mathfrak{S}.\beta'''' = 0{,}547944$ daher

$[\mathfrak{S}.\beta+\mathfrak{S}.\beta'+\mathfrak{S}.\beta''+\mathfrak{S}.\beta'''+\mathfrak{S}.\beta''''] = 3{,}875898$ hierzu $+\frac{3}{4}$ giebt:

$\frac{3}{4} = 0{,}750000$

$4{,}625898$

und $Q = 0{,}2618[\frac{3}{4}+\mathfrak{S}.\beta+\mathfrak{S}.\beta'+\mathfrak{S}.\beta''+\mathfrak{S}.\beta'''+\mathfrak{S}.\beta''''...]$

$Q = 0{,}2618 \times 4{,}62598 = 1{,}211081$ Elle $= 1$ Elle 5 Zoll; folglich die Länge der halben Ellipse $= 2$ Ellen 10 Zoll; der Umfang der ganzen Ellipse $= 4$ Ellen 20 Zoll.

Anmerk. Die Formel für die halbe Ellipse ist, wenn sie unmittelbar aus der Aufgabe hergeleitet werden soll $= 0{,}5236[\frac{3}{4}+\mathfrak{S}.\beta+\mathfrak{S}.\beta'+\mathfrak{S}.\beta''+\mathfrak{S}.\beta'''+\mathfrak{S}.\beta''''....]$ und für den Umfang der ganzen Ellipse $1{,}0472[\frac{3}{4}+\mathfrak{S}.\beta+\mathfrak{S}.\beta'+\mathfrak{S}.\beta''+\mathfrak{S}.\beta'''+\mathfrak{S}.\beta''''...]$.

Aufgaben,
den Flächeninhalt der ganzen und halben Ellipsen, so wie eines Theiles derselben zu bestimmen.

§. 10.

28ste Aufgabe.

Die große Axe AB einer Ellipse Fig. 2, sei $= a = 16$ Ellen 8 Zoll, die kleine Axe DE $= b = 10$ Ellen 6 Zoll, wie viel beträgt der Flächeninhalt F derselben?

Auflösung.

$a = 16\frac{1}{3}$ Elle.
$b = 10\frac{1}{4}$ „

$F = 0{,}7854.ab.$
$F = 0{,}7854.16\frac{1}{3}.10\frac{1}{4}.$
$F = 131{,}489$ □Elle $= 131$ □Elle 281,6 □Zoll.

29ste Aufgabe.

Wie viel beträgt der Flächeninhalt F, einer halben Ellipse, deren große Axe = a = 20 Ellen, und die kleine Axe = b = 10 Ellen ist?

Auflösung.

a = 20 Ellen.
b = 10 „

$$F = 0{,}3927 . ab.$$
$$F = 0{,}3927 . 20 . 10$$
$$F = 78{,}54 \square\text{Ellen} = 78 \square\text{Ellen } 311 \square\text{Zoll.}$$

30ste Aufgabe.

Die Fläche ABECD Fig. 9, bestehet aus dem Rectangel ABCD und der Hälfte einer Ellipse BEC. Die Breite AD sei = BC = a = 2 Ellen 6 Zoll; die Seitenlinie des Rectangels = AB = FG = c = 3 Ellen 18 Zoll und die halbe kleine Axe der Ellipse EG = $\frac{1}{2}$b = 10 Zoll; wie viel beträgt die ganze Fläche ABECD an □Ellen = F?

Auflösung.

a = $2\frac{1}{4}$ Elle.
b = $\frac{5}{6}$ „
c = $3\frac{3}{4}$ „

$$F = a(0{,}3927 . b + c)$$
$$F = 2\tfrac{1}{4}(0{,}3927 . \tfrac{5}{6} + 3\tfrac{3}{4})$$
$$F = 2\tfrac{1}{4}(0{,}32725 + 3{,}75)$$
$$F = 2\tfrac{1}{4} . 4{,}07725.$$
$$F = 9{,}1738 \square\text{Ellen} = 9 \square\text{Ellen } 100 \square\text{Zoll.}$$

31ste Aufgabe.

Es soll der Flächeninhalt F des elliptischen Theiles AHG Fig. 10, gefunden werden, wenn der Anfangspunkt der Abscissen in A angenommen wird. Ferner möge die ganze Axe = AB = a = 8 Ellen; die kleine Axe DE = b = 4 Ellen, und die Abscisse AH = x = 3 Ellen sein.

Auflösung.

a = 8 Ellen.
b = 4 „
x = 3 „

$$F = \frac{ab}{8} \text{ B.S.} \left(\frac{2\sqrt{ax - x^2}}{a}\right) - \frac{(a-2x)b}{4a}\sqrt{(ax - x^2)}$$

$$F = \frac{8.4}{8}. \text{ B.S.} \left(\frac{2\sqrt{8.3 - 3^2}}{8}\right) - \left(\frac{8-2.3}{4.8}\right) 4\sqrt{(8.3 - 3^2)}$$

$$F = 4 \text{ B.S.} [\tfrac{1}{4}\sqrt{15}] - \tfrac{1}{4}\sqrt{15}.$$

Ausübung.

$\frac{1}{4}\sqrt{15} = \frac{1}{4}.3{,}8729827 = 0{,}9682457$.

S. $(\frac{1}{4}\sqrt{15} =$ S. $= 0{,}9682458$ daher

Log. S. $0{,}9682458 = 0{,}9859830$

23

3,2

$0{,}9859856 - 1$

$+ 10$

$9{,}9859856$ hierzu gehört 75° 31′ 21″

9742

5,44 | 114,00 | 21″

Dieses gefundene Gradmaß nach den Tabellen A, B, C, in Theile des Halbmessers 1 verwandelt, giebt nach Tab.

A, für 75° = 1,30899694

B, ‚ 31′ = 0,00901753

C, ‚ 21″ = 0,00010181

folgl. $\text{B.S.}\left(\frac{2\sqrt{ax - x^2}}{a}\right) = \text{B.S.}\ (\frac{1}{4}\sqrt{15}) = 1{,}31811628$,

in Theilen des Halbmessers = 1.

Es ist demnach $F = 4\,\text{B.S.}\,(\frac{1}{4}\sqrt{15}) - \frac{1}{4}\sqrt{15}$

$F = 4.1{,}318116 - 0{,}968245$

$F = 5{,}272464 - 0{,}968245$

$F = 4{,}3042$ □Elle $= 4$ □Ellen 175,2 □Zoll.

Der Flächeninhalt des ganzen Abschnittes GAK ist demnach

$$2F = \frac{ab}{4} \text{ B.S.} \left(\frac{2\sqrt{ax - x^2}}{a}\right) - \left(\frac{a-2x}{2a}\right) b\sqrt{ax - x^2}$$

Anmerk. Diese Aufgabe kann auch nach der Gleichung: $F = \frac{1}{720}\,ab\,(2\alpha - \text{S.}2\alpha)$ aufgelöst werden. Man verfährt hierbei auf folgende Weise: 1) Suche man ei-

nen Bogen α in Theilen des Halbmesser $= 1$, dessen Cosinus $= \left(\frac{a-2x}{a}\right)$ ist; duplire diesen Bogen und finde zu dem Gradmaße desselben den Sinus.

Es ist nämlich: $S.\alpha = \left(\frac{a-2x}{a}\right) = \left(\frac{8-2.3}{8}\right) = \frac{1}{2} =$ 0,25, und der Log. von $0{,}25 = 0{,}3979400 - 1$

$+ 10,$

Log. $S.\alpha$ = Log. $S.\frac{1}{2}$ = Log. S. $0{,}25 = 9{,}3979400 = 75°\ 32'$

6215

81,57 | 3185,00 | 39″
24471
73790

daher das Gradmaß von $\alpha = 75° 32' - 39'' = 75° 31' 21''$
und " " " $2\alpha = 151° 2' 42''$.

2) Diesen Bogen verwandle man mittelst der Tabellen aus §. 3. in Theile des Halbmessers $= 1$. Es ist nämlich nach

A, $151° = 2{,}63544714$
B, $2' = 0{,}00058178$
C, $42'' = 0{,}00020362$

(A.) folgl. B. $2\alpha = 2{,}63623254$

Ferner ist $S.2\alpha = S.151° 2' 42'' = S.28° 57' 18'' = 9{,}6848868$

685

Diff. $1''\ 38{,}05 \times 18'' = 684{,}9.$ $9{,}6849553$

$0{,}6849553 - 1$

Zu dem Log. des $S.2\alpha = 0{,}6849553 - 1$ gehört die Zahl (B.) 0,4841225.

Diese gefundenen Werthe aus (A.) und (B.) in die Gleichung

$F = \frac{1}{10} a . b . [2\alpha - S.2\alpha]$ substituirt geben:

$F = \frac{1}{10} . 8 . 4 . (2{,}63623254 - 0{,}4841225)$

$F = 2 . 2{,}1521 = 4{,}304 = 4$ □Ellen 175,2 □Zoll

wie oben.

32ste Aufgabe.

Der Flächeninhalt F des Theiles KAG der Ellipse Fig. 10 soll gefunden werden, wenn die Abscisse AH $= x = 2$ Ellen

und die Chorde GK = 2y = $7\frac{1}{5}$ Elle, ferner die große Axe AB = a = 20 Ellen, so wie die kleine Axe DE = b = 12 Ellen gegeben ist.

Auflösung.

a = 20 Ellen.
b = 12 „
x = 2 „
y = $3\frac{3}{5}$ „

$$F = \tfrac{1}{4}ab \,.\, \text{B.S.}\left(\frac{2y}{b}\right) - \left(\frac{a}{2} - x\right)y$$

$$F = \tfrac{1}{4} \,.\, 20 \,.\, 12 \,.\, \text{B.S.}\left(\frac{7\frac{1}{5}}{12}\right) - \left(\frac{20}{2} - 2\right).3\tfrac{3}{5}$$

$$F = 60 \,.\, \text{B.S.}\left(\tfrac{3}{5}\right) - 28\tfrac{4}{5} = 60 \,.\, \text{B.S.}\left(\tfrac{3}{5}\right) - 28{,}8.$$

Ausübung.

S.$\frac{3}{5}$ = S.0,6
Log. S.0,6 = 0,7781513 − 1
+ 10
Log. S. 0,6 = 9,7781513, hierzu gehört 36° 52′ 11″

		1186	
Diff. 1″ = 28,07	327,00		11″
	280 7		
	46 30		

Diesen Bogen in Theile des Halbmessers = 1 verwandelt ist nach Tabelle A, 36° = 0,62831853
„ „ B, 52′ = 0,01512619
„ „ C, 11″ = 0,00005333 „
folgl. B.S.$\left(\frac{3}{5}\right)$ = 0,64349805 in Theilen des Halbmessers = 1.

Daher F = 60 . B.S.$\frac{3}{5}$ − 28,8
F = 60 . 0,6435 − 28,8
F = 38,61 − 28,8 = 9,81 □Elle = 9 □El. 406,5 □Z.

Aufgaben,
den körperlichen Inhalt von Ellipsoiden, elliptischen Conoiden und elliptischen Gewölben zu bestimmen.

§. 11.

Durch die Bewegung einer halben Ellipse um eine ihrer beiden Axen wird ein körperlicher Raum gebildet, der ein Ellipsoid genannt wird. Geschieht die Bewegung um die große Axe BA Fig. 11, so wird der krummlinige Körper ein längliches Ellipsoid; geschieht hingegen die Bewegung um die kleine Axe IK Fig. 12, ein gedrücktes oder abgeplattetes Ellipsoid genannt.

33ste Aufgabe.

Wie viel Kubikellen beträgt der körperliche Inhalt eines länglichen Ellipsoid = A Fig. 11, wenn die große Axe BA = a = 3 Ellen 8 Zoll und die kleine Axe DE = b = 2 Ellen gegeben ist.

Auflösung.

a = $3\frac{1}{3}$ Elle.
b = 2 „

$$A = 0{,}5236 \cdot ab^2$$
$$A = 0{,}5236 \cdot 3\tfrac{1}{3} \cdot 2^2$$
$$A = 6{,}981 \text{ Kubikelle} = 6 \text{ K. E.} = 13561 \text{ K. Zoll.}$$

34ste Aufgabe.

Wie viel Kubikellen würde der körperliche Inhalt des gedrückten Ellipsoids betragen, wenn die Dimensionen der vorhergehenden Aufgabe beibehalten werden, indem sich die Hälfte der Ellipse um die kleine Axe IK Fig. 12, herumbewegt.

Auflösung.

a = $3\frac{1}{3}$ Ellen.
b = 2 „

$A = 0{,}5236\ b \cdot a^2$

$A = 0.5236 . 2 . (3\frac{1}{3})^2$

$A = 0{,}5236 . 2 . \frac{100}{9}$

$A = 11{,}636$ K. E. $= 11$ K. E. 8792 K. Z.

Anmerk. Für den körperlichen Inhalt der Hälfte eines länglichen Ellipsoids ist die Formel $= 0{,}2618 . ab^2$ und für den körperlichen Inhalt der Hälfte eines gedrückten Ellipsoids $= 0{,}2618 . ba^2$.

§. 12.

Es möge EBC Fig. 13, den Quadranten einer Ellipse bezeichnen, und angenommen sein, daß der Bogen BC kleiner als der Quadrant, sich um die mit der Axe EF parallellaufende Linie BD herumbewegt. Durch diese kreisförmige Bewegung wird der krummlinig zugespitzte Körper ABC beschrieben, dessen Inhalt berechnet werden soll.

Es ist deßhalb FE der halben großen Axe, welche zu den elliptischen Quadranten EC gehört, $= \frac{1}{2}$ a und FC der halben kleinen Axe $= \frac{1}{2}$b; auch sei BD $= y$, so wie FD $= x$ gegeben.

35ste Aufgabe.

Zur Berechnung des krummlinigten Körpers ABC Fig. 13, sei die große Axe 2EF, der dem Bogen BC zugehörenden Ellipse $= a = 4$ Ellen; die kleine Axe $2CF = b = 3$ Ellen, und die Entfernung der Drehungsaxe BD vom Mittelpunkte $F = FD = x = 18$ Zoll; wie viel Kubikellen beträgt der körperliche Inhalt des elliptischen Conoids $ABC = Q$.

Auflösung.

Man betrachte FD als eine Abscisse $= x = 18$ Zoll, und BD als die zu findende Ordinate $= y$ unter der Bedingung, daß die kleine Axe als Abscissenlinie und der Anfangspunkt der Abscissen im Mittelpunkte F befindlich ist. Hierzu ist die Gleichung:

$a = 4$ Ellen.

$b = 3$ "

$x = \frac{3}{4}$ "

$$BD = y = \frac{a}{b}\sqrt{\tfrac{1}{4}b^2 - x^2}$$

$$y = \tfrac{4}{3}\sqrt{\tfrac{1}{4}.9 - \tfrac{9}{100}}$$

$$y = \tfrac{4}{3}\sqrt{\tfrac{9}{4} - \tfrac{9}{100}} = \tfrac{4}{3}\sqrt{\tfrac{225}{100} - \tfrac{9}{100}}$$

$$y = \tfrac{4}{3}\sqrt{\frac{27}{16}} = \tfrac{4}{3}\frac{\sqrt{3.9}}{4}$$

$$y = \tfrac{4}{3}.\tfrac{1}{4}.3\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

$$y = 1{,}73205$$

Ferner ist nach vorstehender Beziehung:

$$Q = 3{,}1416.y\left(\tfrac{1}{4}b^2 - \frac{b^2y^2}{3a^2}\right) - 0{,}7854.axb.B.S.\frac{2y}{a}$$

$$Q = 3{,}1416.1{,}732\left(\tfrac{1}{4}.9 - \frac{9.2{,}999}{3.16}\right) - 0{,}7854.4.\tfrac{3}{4}.3 \times B.S.\frac{2.1{,}732}{4}$$

(A.) $Q = 5{,}4412.1{,}6876 - 7{,}0686.B.S.0{,}866.$

Ausübung von 7,0686 B.S. 0,866

Log. 0,866 = 0,9375179 − 1
+ 10.

Log. S. 0,866 = 9,9375179 hierzu gehört 59° 59′ 49″

4577
12,16 | 602,00 | 49″
4864
11560

Dieses Gradmaß in Theile des Halbmessers = 1 nach den Tabellen §. 3. verwandelt, giebt

für 59° = 1,0297442
» 59′ = 0,0171624
» 49″ = 0,0002375

B.S. 0,866 = 1,0471441
7,0686
7,3300087
6282864
837712
62826

7,0686 . B.S. 0,866 = 7,4018427

Diese Werthe in (A.) substituirt, geben.

$Q = 5{,}4412 \,.\, 1{,}6876 - 7{,}4018$

$Q = 9{,}1825 - 7{,}4018$

$Q = 1{,}7807$ Kubikelle $= 1$ Kubikelle 10792 Kubikzoll.

36ste Aufgabe.

Ein hohler Raum CBAE Fig. 14, welcher von einem elliptischen Bogen ABC begrenzt ist, habe $BD = x = 8$ Ellen zur Höhe oder Abscisse. Die Spannung AC oder die doppelte Ordinate betrage $2y = 15{,}68$ Elle. Die den elliptischen Bogen zugehörige große Axe sei $= a = 20$ Ellen; die kleine Axe $= b = 16$ Ellen, und die Länge CE des Gewölbes $= c = 24$ Ellen. Wie viel Kubikellen $= Q$ enthält der dadurch gebildete hohle Raum.

Auflösung.

$a = 20$ Ellen.
$b = 16$ „
$c = 24$ „
$x = 8$ „
$2y = 15{,}68$ „ folgl.
$y = 7{,}84$ „

$$Q = \tfrac{1}{4} abc \,.\, \text{B. S.}\left(\frac{2y}{b}\right) - c\left(\frac{a}{2} - x\right) y$$

$$Q = \tfrac{1}{4}.20.16.24.\text{B.S.}\left(\frac{15{,}68}{16}\right) - 24\left(\frac{20}{2} - 8\right) 7{,}84$$

folgl. (A.) $Q = 1920 \,.\, \text{B.S.}\, 0{,}98 - 376{,}32.$

Ausübung des Ausdruckes: $1920 \,.\, \text{B.S.}\, 0{,}98.$

Log. $0{,}98 = 0{,}9912261 - 1$
$+10$
Log. B.S. $0{,}98 = 9{,}9912261 = 78°\ 31'\ 18''$
2184
Diff. $1'' = 4{,}27 \mid 77{,}00 \mid 18''$
427
3430

Nach §. 3. ist die Länge dieses Bogens:

$78° = 1{,}36135682$
$31' = 0{,}00901753$
$18'' = 0{,}00008727$

B.S. $0{,}98 = 1{,}37046162$ in Theilen des Halbmessers 1.

Diesen Werth in obige Gleichung (A.)

$Q = 1920 . B.S. 0{,}98 - 376{,}32$ substituirt giebt:

$Q = 1920 . 1{,}3704 - 376{,}32$

$Q = 2631{,}17 - 376{,}32$

$Q = 2254{,}85$ K. E. $=$ 2254 K. E. 11750 K. Zoll.

37ste Aufgabe.

Ein Gefäß, z. B. eine Wanne, habe die Gestalt eines elliptisch' abgekürzten Kegels. Die große Axe, der größern Ellipse AB Fig. 16, sei $= A = 2\frac{2}{3}$ Elle; die kleine Axe EF derselben $= B = 1\frac{3}{5}$ Elle; ferner die große Axe CD der ähnlichen kleineren Ellipse $= a = 2$ Ellen; die kleine Axe GH $= b = 1\frac{1}{5}$ Elle; die senkrechte Höhe des Gefäßes IK $= h = 1\frac{1}{2}$ Elle; wie viel Kubik-Werkfuße $= Q$ enthält dasselbe?

Auflösung.

$A = 2\frac{2}{3}$ Ellen $= 5\frac{1}{3}$ W. F.
$B = 1\frac{3}{5}$ " $= 3\frac{1}{5}$ " "
$a = 2$ " $= 4$ " "
$b = 1\frac{1}{5}$ " $= 2\frac{2}{5}$ " "
$h = 1\frac{1}{2}$ " $= 3$ " "

$$Q = 0{,}2618 . h \left[A.B. + a.b. + \sqrt{ABab}\right]$$

$$Q = 0{,}2618 . 3 \left[5\tfrac{1}{3} . 3\tfrac{1}{5} + 4 . 2\tfrac{2}{5} + \sqrt{5\tfrac{1}{3} . 3\tfrac{1}{5} . 4 . 2\tfrac{2}{5}}\right]$$

$$Q = 0{,}7854 \left[17\tfrac{1}{15} + 9\tfrac{3}{5} + \sqrt{\frac{4096}{25}}\right]$$

$$Q = 0{,}7854 \left[17\tfrac{1}{15} + 9\tfrac{3}{5} + \frac{64}{5}\right]$$

$$Q = 0{,}7854 . 40\tfrac{2}{5}$$

$Q = 31{,}7301$ K. W. F. $=$ 31 K. W. F. 1261,6 K. Z.

Aufgaben,
die Außenflächen der Ellipsoiden zu bestimmen.

§. 13.

38ste Aufgabe.

Ein längliches Ellipsoid, z. B. ein Thurmknopf, habe zur großen Axe AB Fig. 11, = a = 1 Elle 18 Zoll, und zur kleinen Axe DE = b = 20 Zoll. Wie viel Quadrat-Werkfuß beträgt dessen Außenfläche = F?

Auflösung.

a = 1 Elle 18 Zoll = $3\frac{1}{2}$ W. F.
b = 20 Zoll = $1\frac{2}{3}$ W. F.

$$F = 1{,}5708 \cdot b\left[b + \frac{a^2}{\sqrt{(a+b)(a-b)}} \cdot \text{B.S.}\left(\frac{\sqrt{(a+b)(a-b)}}{a}\right)\right]$$

$$F = 1{,}5708 \cdot 1\tfrac{2}{3}\left[1\tfrac{2}{3} + \frac{(3\frac{1}{2})^2}{\sqrt{(3\frac{1}{2}+1\frac{2}{3})(3\frac{1}{2}-1\frac{2}{3})}} \cdot \text{B.S.}\left(\frac{\sqrt{(3\frac{1}{2}+1\frac{2}{3})}}{3\frac{1}{2}} \times \sqrt{(3\tfrac{1}{2}-1\tfrac{2}{3})}\right)\right]$$

$$F = 2{,}618\left[1{,}6666 + \frac{12{,}25}{\sqrt{9\frac{17}{36}}} \times \text{B.S.}\left(\frac{\sqrt{9\frac{17}{36}}}{3{,}5}\right)\right]$$

(A.) $F = 2{,}618\,[1{,}6666 + 3{,}9802 \cdot \text{B.S.}\,0{,}8793422]$.

Berechnung des Ausdruckes: 3,9802. B. S. 0,8793422.

Log. 0,8793422 = 0,9441568 — 1
10
1,0
0,9441579 — 1
+ 10
Log. S. 0,8793422 = 9,9441579 = 61° 33′ 47″
1041
Diff. 1″ = 11,41 | 538,00 | 47″
456 4
81 60

Dieses gefundene Gradmaß in Theilen des Halbmessers = 1 ausgedrückt, giebt nach §. 3.

Tabelle A, für 61° = 1,06465084
„ B, „ 33′ = 0,00959931
„ C, „ 47″ = 0,00022786
1,07447801
3,9802
3,22343403
9670302 09
859582 40
21489 4
3,9802, B.S. 0,8793422 = 4,27663737

Den gefundenen Werth in A. substituirt erhält man:

$F = 2{,}618\,[1{,}6666 + 4{,}2766]$

$F = 2{,}618\,[5{,}9432] = 15{,}5593$ □Elle = 15 □Ellen 322 □Z.

39ste Aufgabe.

Wie viel Quadrat-Werkfuß = F beträgt die Oberfläche vom obern Theile MBN des Ellipsoids Fig. 11, dessen große Axe BA = a = 2 Ellen; die kleine Axe DE = b = 1 Elle, und die Abscisse des Theils MBN = BQ = x = 12 Z. ist?

Auflösung.

a = 4 W. Fuß.
b = 2 „ „
x = 1 „ „

$$F = 0{,}3927 \cdot \frac{a^2 b}{r(a+b)(a-b)} \times (2\alpha + S.2\alpha)$$

$$F = 0{,}3927 \cdot \frac{16.2}{r\,12} \times (2\alpha + S.2\alpha)$$

(A.) $F = 3{,}6276 \times (2\alpha + S.2\alpha)$

Der Werth des Bogens 2α und $S.2\alpha$ ist auf folgende Weise zu finden:

$$\cos.\alpha = \sqrt{1 - \frac{4(a+b)(a-b)x^2}{a^4}} = \sqrt{1 - \left(\frac{4.6.2.1^2}{4.4.4.4}\right)} = \sqrt{1 - \frac{3}{16}} = \sqrt{\frac{13}{16}}$$

$$\text{Log. } \mathfrak{S}.\alpha = \text{Log.} \sqrt{\frac{13}{16}} = 0{,}9549117 - 1$$

$$+ 10$$

Log. $\mathfrak{S}.\alpha = 9{,}9549117$, hierzu gehört $25° 39' 33'' = \alpha$

folgl. $51° 19' 6'' = 2\alpha$

Dieses gefundene Gradmaß von 2α, nach §. 3., in Theilen des Halbmessers 1 ausgedrückt, giebt

nach Tabelle A, für $51° = 0{,}8901179$
" " B, " $19' = 0{,}0055268$
" " C, " $6'' = 0{,}0000290$

folgl. $2\alpha = 0{,}8956737$ Theile des Halbmessers 1.

Ferner ist $\mathfrak{L}.\mathfrak{S}.2\alpha = \mathfrak{L}.\mathfrak{S}.51° 19' 6'' = 9{,}8924354$

Diff. $1'' = 16{,}85$ | 101

6 | $9{,}8924455$

$101{,}10$ $\quad \mathfrak{L}.\mathfrak{S}.2\alpha = 0{,}8924455 - 1 =$ $0{,}78063$.

Diese Werthe von 2α und $\mathfrak{S}.2\alpha$ substituire man in (A.) und man erhält:

$F = 3{,}6276\,(0{,}89567 + 0{,}78063)$

$F = 3{,}6276.1{,}6763 = 6{,}0809$ □W.F. $= 6$ □W.F. $11{,}6$ □W.Z.

Vorstehende Aufgabe kann aber auch, unter obigen Bedingungen, mittelst folgender Formel aufgelöst werden.

$$F = 3{,}1416\,b.\left[\frac{x}{2}\sqrt{1 - 4\frac{(a+b)(a-b)x^2}{a^4}} + \frac{a^2}{4\sqrt{(a+b)(a-b)}} \times \mathfrak{B}.\mathfrak{S}.\left(\frac{2x\sqrt{(a+b)(a-b)}}{a^2}\right)\right]$$

$$F = 3{,}1416.2\left[\frac{1}{2}\sqrt{1 - \left(\frac{4.6.2.1^2}{4.4.4.4.}\right)} + \frac{16}{4\sqrt{12}} \times \mathfrak{B}.\mathfrak{S}.\left(\frac{2.1.\sqrt{12}}{16}\right)\right]$$

$$F = 6{,}2832\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{13}{16}} + \frac{4}{\sqrt{12}} \times \mathfrak{B}.\mathfrak{S}.\left(\frac{\sqrt{12}}{8}\right)\right]$$

$$F = 6{,}2832\left[\frac{\sqrt{13}}{8} + \frac{2}{\sqrt{3}} \times \mathfrak{B}.\mathfrak{S}.\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right]$$

(B.) $F = 6{,}2832\,[0{,}4507 + (1{,}1547 \,.\, \mathfrak{B}.\mathfrak{S}.\, 0{,}4330127)]$

Ausübung des Ausdruckes 1,1547 V.S. 0,4330127.

Log. 0,4330127 = 0,6365006 — 1

+ 10

Log. S. 0,4330127 = 9,6365006 = 25° 39′ 32″

3601

43,83 | 1405,00 | 32″

1314 9

90 10

Dieses Gradmaß in Theilen des Halbmessers = 1 ausgedrückt ist:

25° = 0,43633231

39′ = 0,01134464

32″ = 0,00015514

V.S. $\frac{1\ 3}{4}$ = 0,44783 | 209 Th. d. Halbm. = 1

1,1547

44783

44783

22390

1788

308

0,51710

Diesen gefundenen Werth 0′5171 statt 1,1547 . V.S. = 0,4330127 in die Gleichung (V.) substituirt, giebt:

F = 6,2832 [0,4507 + 0,5171]

F = 6,2832 . 0,9678 = 6,0808 □Werkfuß.

40ste Aufgabe.

Es soll die Oberfläche eines elliptischen Conoids Fig. 17, = F gefunden werden, welches durch Umdrehung des Quadranten DBC der Ellipse um die halbe große Axe BD = ½a = 1 Werkfuß entstanden ist; die halbe kleine Axe DC = ½b sei 9 Zoll; wie viel Quadratwerkfuß enthält die Oberfläche des Ellipsoids?

Auflösung.

a = 2 W.F.

b = 1½ "

$$F = 3{,}1416.b\left[\frac{b}{4} + \frac{a^2}{4\sqrt{(a+b)(a-b)}}.\text{B.S.}\left(\frac{\sqrt{(a+b)(a-b)}}{a}\right)\right]$$

$$F = 3{,}1416.1\tfrac{1}{2}\left[\frac{1\frac{1}{2}}{4} + \frac{4}{4\sqrt{(2+1\frac{1}{2})(2-1\frac{1}{2})}}.\text{B.S.}\left(\frac{\sqrt{(2+1\frac{1}{2})(2-1\frac{1}{2})}}{2}\right)\right]$$

$$F = 4{,}7124\left[\frac{3}{8} + \frac{4}{4\sqrt{\frac{7}{4}}}.\ \text{B.S.}\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)\right]$$

(A.) $F = 4{,}7124\,[0{,}375 + 0{,}755929\,.\,\text{B.S.}\,0{,}6614378]$

Ausübung des Ausdruckes: 0,755929 . B.S. 0,6614378.

Log. 0,6614378 = 0,8204839 − 1

46

5,3

0,8204890 − 1

+ 10

Log. S. 0,6614378 = 9,8204890 = 41° 24′ 34″

4063

Diff. 1″ = 23,88 | 827,00 | 34″

716 4

110 60

Dieses Gradmaß nach den in §. 3. enthaltenen Tabellen in Theile des Halbmessers = 1 verwandelt, giebt:

für 41° = 0,71558499
„ 24′ = 0,00698132
„ 34″ = 0,00016484

Länge des $\text{B.S.}\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)$ = B.S. 0,6614378 = 0,72273115 und 0,755929 × 0,722731 = 0,54632. Nun substituire man diesen gefundenen Werth in die Gleichung (A.) und man erhält:

$F = 4{,}7124\,[0{,}375 + 0{,}54632]$

$F = 4{,}7124 \times 0{,}92132$

$F = 4{,}3416$ □Werkfuß = 4 □W.F. 49,2 □Zoll.

41ste Aufgabe.

An einem gedrückten Ellipsoid sei die große Axe AD = a = 3 Ellen, Fig. 18, die kleine Axe BE = b = 2 Ellen. Wie viel Quadrat-Werkfuß beträgt die Außenfläche = F?

Auflösung.

$a = 6$ W. F.
$b = 4$ W. F.

$$F = 1{,}5708 . a\left[a + \frac{b^a}{2\sqrt{(a+b)(a-b)}} . L.\left(\frac{a+\sqrt{(a+b)(a-b)}}{a-\sqrt{(a+b)(a-b)}}\right)\right]$$

$$F = 1{,}5708 . 6\left[6 + \frac{16}{2\sqrt{20}} . L.\left(\frac{6+\sqrt{20}}{6-\sqrt{20}}\right)\right]$$

$$(A.)\ F = 9{,}4248\left[6 + 1{,}7888 . L.\left(\frac{10{,}47213}{1{,}52787}\right)\right].$$

Ausübung.

Log. 10,47213 = 1,0200296 — Log. 1,52787 = 0,1840665
42 — 199
12,5 — 0,1840864
1,0200350

mithin ist $L.\left(\frac{10{,}47213}{1{,}52787}\right) = 1{,}0200350 - 0{,}1840864 =$ 0,8359486, hierzu gehört die Zahl 6,85407, daher ist

41
45

$L.\left[\frac{10{,}47213}{1{,}52787}\right] = L.\ 6{,}85407.$ Hiervon ist der Briggische Log. mit dem Modul multiplicirt:

Log. 6,85407	=	0,8359486
Modul	=	2,302585
		1,6718972
		2507845 8
		16718 8
		4179 5
		668 0
		41 5
L. 6,85407	=	1,9248425

und 1,7888 L. 6,85407 = 1,9248425

	1,7888
	1,9248425
	1,3473897 5
	1539873 6
	153987 2
	15398 4

1,7888 L. 6,85407 = 3,4431581 durch Substitution dieses Werthes in (A.) erhält man:

$$F = 9{,}4248\,[6 + 3{,}4431]$$
$$F = 9{,}4248 \,.\, 9{,}4431$$
$$F = 88{,}9993 \square \text{W. F.} = 88 \square \text{W. F. } 143{,}89 \square \text{Zoll.}$$

42ste Aufgabe.

Es soll die Oberfläche F des Segmentes FBG, Fig. 18, eines gedrückten Ellipsoids gefunden werden, dessen große Axe AD = a = 2 Ellen; die kleine Axe BE = b = 1 Elle, und die Abscisse des Segmentes, BH = x = $\frac{1}{2}$ Elle beträgt.

Auflösung.

a = 2 Ellen.
b = 1 „
x = $\frac{1}{2}$ „

Wenn $\frac{r(a+b)(a-c)}{a}$ hier = $\frac{r(2+1)(2-1)}{2}$ = $\frac{r3}{2}$ = m gesetzt wird; so ist:

$$F = 3{,}1416 \,.\, a\left[\frac{1}{2}x\sqrt{1+\frac{4a^2m^2x^2}{b^4}}+\frac{b^2}{4am}\,.\,L.\left(\frac{2amx}{b^2}+\sqrt{1+\frac{4a^2m^2x^2}{b^4}}\right)\right]$$

$$F = 3{,}1416 \,.\, 2\left[\frac{1}{2}\,.\,\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{4.4.\frac{3}{4}.\frac{1}{4}}{1^4}}+\frac{1^2}{4.2.\frac{r3}{2}}\,.\,L.\left(2.2.\frac{r3}{2}\,.\,\frac{1}{2}+\sqrt{1+\frac{4.4.\frac{3}{4}.\frac{1}{4}}{14}}\right)\right]$$

$$F = 6{,}2832\left[\tfrac{1}{4}\sqrt{4} + \frac{1}{4\sqrt{3}}.\text{L.}[\sqrt{3}+\sqrt{4}]\right]$$

$$F = 6{,}2832\left[\tfrac{1}{2} + \frac{1}{4\sqrt{3}}.\text{L.}[\sqrt{3}+2]\right]$$

$$F = 6{,}2832\,[0{,}5 + 0{,}14433\,.\,\text{L.}\,(3{,}732)].$$

Ausübung.

Log. 3,732 =	0,5719416
	2,302585
	1,1438832
	1715824 8
	11438 8
	2859 5
	456 8
	28 5
L, 3,732 =	1,3169440
0,14433 L. 3,732 =	0,1900745.

Diesen Werth in (A.) gesetzt, ist:

$$F = 6{,}2832\,[0{,}5 + 0{,}1900745]$$

$$F = 6{,}2832\,.\,0{,}6900745$$

$$F = 4{,}3358\ \square\text{Ellen} = 4\ \square\text{Ellen}\ 193{,}4\ \square\text{Zoll}.$$

Aufgaben,

die sich auf Bestimmung einzelner Punkte und Linien der Hyperbel beziehen.

§. 14.

43ste Aufgabe.

Welche Entfernung hat der Punkt G einer Hyperbel von der verlängerten Axe KH Fig. 19, oder, welches gleich viel ist, wie lang ist die Ordinate HG, wenn die erste Axe AB =

$2a = 8' 6''$, die Excentricität $CF = c = 5'$, und die dem Punkte G zugehörende Abscisse CH, vom Mittelpunkte C aus genommen, $= x = 12' 4''$ Decimalmaß beträgt?

Auflösung.

$a = 4{,}3'$
$c = 5'$
$x = 12{,}4'.$

$$y = \sqrt{\frac{(c^2 - a^2)(x^2 - a^2)}{a^2}}$$

$$y = \sqrt{\frac{(5^2 - 4{,}3^2)(12{,}4^2 - 4{,}3^2)}{4{,}3^2}}$$

$$y = \sqrt{\left(\frac{25 - 18{,}49}{18{,}49}\right)(153{,}76 - 18{,}49)}$$

$$y = \sqrt{\frac{6{,}51 \times 135{,}27}{18{,}49}} = 6{,}9011 = 6'9{,}011''.$$

44ste Aufgabe.

Es sei die Abscisse CH einer Hyperbel, Fig. 19, $= x =$ 6 Ellen, die ihr zugehörende Ordinate $HG = y = 4$ Ellen 12 Zoll, und die erste Axe $AB = 2a = 10$ Ellen, wie groß ist die Excentricität $= c$ dieser Hyperbel?

Auflösung.

$a = 5$ Ellen.
$x = 6$ „
$y = 4\frac{1}{2}$ „

$$c = \sqrt{\frac{a^2 y^2}{x^2 - a^2} + a^2}$$

$$c = \sqrt{\frac{25 . 20\frac{1}{4}}{36 - 25} + 25}$$

$$c = \sqrt{\frac{506\frac{1}{2}}{11} + 25}$$

$$c = \sqrt{71{,}0227} = 8{,}427 \text{ Ellen} = 8 \text{ Ellen } 10 \text{ Zoll}.$$

45ste Aufgabe.

An der Hyperbel Fig. 19, sei die erste Axe AB = a = 3 Ellen, die zweite oder Zwergaxe LM = b = 2 Ellen und die Abscisse CH vom Mittelpunkte aus, = x = 4 Ellen; wie groß ist die ihr zukommende Ordinate HG?

Auflösung.

a = 3 Ellen.
b = 2 „
x = 4 „

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - \tfrac{1}{4}a^2}$$

$$y = \frac{2}{3}\sqrt{16 - 2\tfrac{1}{4}}$$

$$y = \frac{2}{3}\sqrt{13\tfrac{3}{4}}$$

$$y = \tfrac{1}{3}\sqrt{55} = 2{,}472 \text{ Ellen} = 2 \text{ Ellen } 11{,}3 \text{ Zoll.}$$

46ste Aufgabe.

Der Parameter DE der Hyperbel Fig. 19, sei = p = 6 Werkfuß; die erste Axe AB = a = 8 Fuß 6 Zoll, und die Abscisse CH = x = 9 Werkfuß; wie groß ist die derselben zugehörige Ordinate HG = HF = y, wenn die Abscissen vom Mittelpunkte aus gezählt werden?

Auflösung.

a = $8\frac{1}{2}$ W. F.
p = 6 „
x = 9 „

$$y = \sqrt{\frac{p}{a}(x^2 - \tfrac{1}{4}a^2)}$$

$$y = \sqrt{\frac{6}{8\frac{1}{2}}(81 - 18\tfrac{1}{16})}$$

$$y = \sqrt{\frac{3021}{68}} = 6{,}665 \text{ W. F.} = 6 \text{ W. F. } 7{,}98 \text{ Zoll.}$$

47ste Aufgabe.

Es soll die zweite oder Zwergaxe LM, Fig. 19, zur Abscissenlinie, und CL = x = 1 Elle angenommen, ferner die erste Axe AB = a = 3 Ellen 12 Zoll, und die zweite Axe LM = b = 2 Ellen sein; welche Entfernung hat der Punkt D von der zweiten Axe LM, oder ihrer Verlängerung, das heißt: wie groß ist die, der Abscisse x zugehörende Ordinate = y?

Auflösung.

a = $3\frac{1}{4}$ Elle,
b = 2 „
x = 1 „

$$y = \frac{a}{b}\sqrt{x^2 + \frac{1}{4}b^2}$$

$$y = \frac{3\frac{1}{4}}{2}\sqrt{1 + \frac{1}{4}.4}$$

$$y = 1\frac{3}{4}\sqrt{2} = 2{,}474 \text{ Elle} = 2 \text{ Ellen } 11{,}3 \text{ Zoll.}$$

48ste Aufgabe.

An einer Hyperbel, Fig. 19, werden die Abscissen vom Mittelpunkte C aus gezählt, und zwar auf der kleinen Axe. Welche Länge hat die Ordinate LD = y, wenn die Abscisse CL = x = 2 Ellen 20 Zoll; die erste Axe AB = a = 3 Ellen, und der Parameter der Hyperbel DE = p = 1 Elle 16 Zoll ist?

Auflösung.

a = 3 Ellen.
p = $1\frac{2}{3}$ „
x = $2\frac{5}{6}$ „

$$y = \sqrt{\frac{a}{p}(x^2 + \frac{1}{4}ap)}$$

$$y = \sqrt{\frac{3}{1\frac{2}{3}}[(2\frac{5}{6})^2 + \frac{1}{4}.3.1\frac{2}{3}]}$$

$$y = \sqrt{1\frac{4}{7}.9\frac{5}{144}}$$

$$y = \sqrt{16{,}7}$$

$$y = 4{,}0865 \text{ Ellen} = 4 \text{ Ellen } 2 \text{ Zoll.}$$

45ste Aufgabe.

An der Hyperbel Fig. 19, sei die erste Axe AB = a = 3 Ellen, die zweite oder Zwergaxe LM = b = 2 Ellen und die Abscisse CH vom Mittelpunkte aus, = x = 4 Ellen; wie groß ist die ihr zukommende Ordinate HG?

Auflösung.

a = 3 Ellen.
b = 2 „
x = 4 „

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - \tfrac{1}{4}a^2}$$

$$y = \frac{2}{3}\sqrt{16 - 2\tfrac{1}{4}}$$

$$y = \frac{2}{3}\sqrt{13\tfrac{3}{4}} =$$

$$y = \tfrac{1}{3}\sqrt{55} = 2{,}472 \text{ Ellen} = 2 \text{ Ellen } 11{,}3 \text{ Zoll.}$$

46ste Aufgabe.

Der Parameter DE der Hyperbel Fig. 19, sei = p = 6 Werkfuß; die erste Axe AB = a = 4 Fuß 3 Zoll, und die Abscisse CH = x = 9 Werkfuß; wie groß ist die derselben zugehörige Ordinate HG = HF = y, wenn die Abscissen vom Mittelpunkte aus gezählt werden?

Auflösung.

a = $8\frac{1}{2}$ W. F.
p = 6 „
x = 9 „

$$y = \sqrt{\frac{p}{a}(x^2 - \tfrac{1}{4}a^2)}$$

$$y = \sqrt{\frac{6}{8\frac{1}{2}}(81 - 18\tfrac{1}{16})}$$

$$y = \sqrt{\frac{3021}{68}} = 6{,}665 \text{ W. F.} = 6 \text{ W. F. } 7{,}98 \text{ Zoll.}$$

47ste Aufgabe.

Es soll die zweite oder Zwergaxe LM Fig. 19, zur Abscissenlinie, und CL = x = 1 Elle angenommen, ferner die erste Axe AB = a = 3 Ellen 12 Zoll, und die zweite Axe LM = b = 2 Ellen sein; welche Entfernung hat der Punkt D von der zweiten Axe LM, oder ihrer Verlängerung, das heißt: wie groß ist die der Abscisse x zugehörende Ordinate = y?

Auflösung.

$a = 3\frac{1}{3}$ Elle.
$b = 2$ "
$x = 1$ "

$$y = \frac{a}{b}\sqrt{x^2 + \frac{1}{4}b^2}$$

$$y = \frac{3\frac{1}{3}}{2}\sqrt{1 + \frac{1}{4}.4}$$

$$y = 1\frac{2}{3}\sqrt{2} = 2{,}474 \text{ Elle} = 2 \text{ Ellen } 11{,}3 \text{ Zoll.}$$

48ste Aufgabe.

An einer Hyperbel Fig. 19, werden die Abscissen vom Mittelpunkte C aus gezählt, und zwar auf der kleinen Axe. Welche Länge hat die Ordinate LD = y, wenn die Abscisse CL = x = 2 Ellen 20 Zoll; die erste Axe AB = a = 3 Ellen, und der Parameter der Hyperbel DE = p = 1 Elle 16 Zoll ist.

Auflösung.

$a = 3$ Ellen.
$p = 1\frac{2}{3}$ "
$x = 2\frac{1}{3}$ "

$$y = \sqrt{\frac{a}{p}(x + \frac{1}{4}ap)}$$

$$y = \sqrt{\frac{3}{1\frac{2}{3}}(2\frac{1}{3} + \frac{1}{4}.3.1\frac{2}{3})}$$

$$y = \sqrt{1\frac{4}{7}.4\frac{1}{12}}$$

$$y = \sqrt{7\frac{7}{20}}$$

$$y = 2{,}7119 \text{ Ellen} = 2 \text{ Ellen } 8{,}4 \text{ Zoll.}$$

Rectification eines hyperbolischen Bogens.

§. 15.

49ste Aufgabe.

Die Länge des Bogens AB = L einer Hyperbel, Fig. 20, soll durch Annäherung bestimmt werden, deren halbe erste Axe AC = a = 1 Elle; die halbe zweite Axe CE = b = 1 Elle, und die Abscisse des Bogens AB, das ist AD = x = 1 Elle ist.

Auflösung.

a = 1 Elle.
b = 1 „
x = 1 „

Die Berechnung der Länge = L. des hyperbolischen Bogens geschiehet nach der Formel:

$$L. = B.\beta\left[\frac{x+y\,T.\frac{1}{2}\alpha}{2} + (n+a)(S.\beta + S.2\beta + S3\beta \ldots) + S.(m-1)\beta - a(S.\gamma + S.\gamma' + S.\gamma'' \ldots) + S.\gamma(m-1)''''\right]$$

in welcher jedoch $T.\frac{1}{2}\alpha$; $S.\beta$ und $S.\gamma$ noch besonders, wie nachstehende Anleitung zeigt, bestimmt werden müssen.

I. Man finde zuförderst die der Abscisse AM zugehörende Ordinate $BD = y = \frac{b}{a}\sqrt{2ax+x^2} = \frac{1}{1}\sqrt{2.1.1+1^2} = \sqrt{3}$.

II. suche man den Winkel AEB = α mittelst der ihm zugehörenden Cotangente. Es ist nämlich:

$$T.\alpha = \frac{b^2}{a^2}.\frac{(a+x)}{a^2y} = \frac{1^2(1+1)}{1^2.1^2.\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Log.}\frac{2}{\sqrt{3}} = 0{,}3010300$$
$$0{,}2385606$$
$$0{,}0624694$$
$$+10$$

$$T.\alpha = T.\frac{2}{\sqrt{3}} = 10{,}0624694 = 40°\ 53'\ 37,''$$ welches Grad-

maß der Kürze halber ohne merklichen Fehler $= 40° 54''$ gesetzt werden kann.

III. Nun denke man sich den Bogen AB in eine beliebige Anzahl Theile $= m$ (hier in 3) so getheilt, daß die aus den Theilungspunkten gezogenen Normalen GL, HM ꝛc., die halbe große Axe AC unter Winkeln schneiden, die z. B. $\frac{1}{m}\alpha = \beta$; $\frac{2}{m}\alpha = 2\beta$; $\frac{3}{m}\alpha = 3\beta$ u. s. f. an Gradmaß betragen. So ist in gegenwärtiger Aufgabe

$$\angle ALG = \frac{1}{m}\alpha = \frac{40° 54'}{3} = 13° 38' = \beta$$

$$\angle AMH = \frac{2}{m}\alpha = \frac{2}{3}.40° 54' = 27° 16' = 2\beta \text{ ꝛc.}$$

IV. Von den gefundenen Winkeln β; 2β; 3β ꝛc. finde man die Cosinus. Es ist nämlich:

$\mathfrak{C}.\beta = \mathfrak{C}.13° 38' = 0{,}971824$

$\mathfrak{C}.2\beta = \mathfrak{C}.27° 16' = 0{,}888884$

folglich $(\mathfrak{A}.)\ 1{,}859708 = [\mathfrak{C}.\beta + \mathfrak{C}.2\beta....]$

V. Auch können nunmehr die in der Formel vorkommenden $\mathfrak{C}.\gamma$, $\mathfrak{C}.\gamma'$, $\mathfrak{C}\gamma''$... bestimmt werden, wenn man vorher durch $S.\gamma$ den Bogen γ, durch $S.\gamma'$ den Bogen γ' ꝛc., mittelst nachstehenden allgemeinen Ausdrücken, gefunden hat. Bei Entwerfung der Formel ist nämlich erwiesen, daß:

1) $S.\gamma = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}.\ S.\beta = \frac{\sqrt{1^2+1^2}}{1}.\ S.13° 38' = \sqrt{2}.S.13° 38'.$

$\text{Log.}\sqrt{2} = 0{,}1505150$

$\text{Log. S. } 13° 38' = 0{,}3723735 - 1$

$0{,}5228885 - 1$

$+10$

$\text{Log. } S.\gamma = 9{,}5228885, \text{ folgl. } \gamma = 19° 28'.$

Eben so:

2) $S.\gamma' = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}.\ S.2\beta = \frac{\sqrt{1^2+1^2}}{1}.\ S.27° 16' = \sqrt{2}.S.27° 16'.$

$$\text{Log. } \sqrt{2} = 0{,}1505150$$
$$\text{Log. S. } 27^\circ\ 16' = 0.6609911 - 1$$
$$0{,}8115061 - 1$$
$$+\ 10$$
$$\text{Log. } S.\gamma' = 9{,}8115061, \text{ folgl. } \gamma' = 40^\circ\ 23'.$$

VI. Zu diesen Winkeln γ und γ' ꝛc. suche man die Cosinus

$$\text{C.}\gamma = \text{C. } 19^\circ\ 28' = 0{,}94283$$
$$\text{C.}\gamma' = \text{C. } 40^\circ\ 23' = 0{,}76172$$
$$\text{(B.) } [\text{C.}\gamma + \text{C}\gamma' \ldots] = 1{,}70455$$

VII. Auch hat man den Werth von $\frac{x+y\,\text{T.}\frac{1}{2}\alpha}{2}$ zu bestimmen. Derselbe ist:

$$\frac{1+\sqrt{3}.\text{T. } 20^\circ\ 27'}{2} = \frac{1+1{,}73205\times 2.681753}{2} = \frac{5{,}6449}{2} =$$
$$\text{(C.)} = 2{,}8224.$$

VIII. Ferner den Werth von $n = x + y\ \text{T.}\alpha = 1 + \sqrt{3}.\frac{2}{\sqrt{3}} = 1 + 2 = 3.$

IX. Endlich verwandle man das Gradmaß des Bogens $\beta = 13^\circ\ 38'$ in Theile des Halbmessers $= 1$, nach den in §. 3. enthaltenen Tabellen, und man erhält:

$$\text{für } 13^\circ = 0{,}22689$$
$$\text{„ } 38' = 0{,}01105$$
$$\text{(D.) } 13^\circ\ 38' = 0{,}23794 = \text{B.}\beta$$

und substituire die Werthe von (A.), (B.), (C.), (D.) in obigem allgemeinen Ausdruck des Bogens L, alsdann ist:

$$L = 0{,}23794\,[2{,}8224 + (3+1)\times 1{,}859708 - 1{,}70455]$$
$$L = 2{,}0359 \text{ Elle} = 2 \text{ Ellen } 0{,}8 \text{ Zoll.}$$

Den körperlichen Raum und die Oberfläche eines hyperbolischen Conoid's zu berechnen.

§. 16.

50ste Aufgabe.

Der körperliche Inhalt eines hyperbolischen Conoids ADB $= Q$, Fig. 21, soll gefunden werden, der durch Umdrehung des Schenkels DB um die Axe DC entstanden ist. Die, dem hyperbolischen Bogen zugehörige erste Axe DE sei $= a = 3$ Ellen 8 Zoll; die zweite oder Zwerg-Axe FG $= b = 2$ Ellen 8 Zoll, und die Höhe oder Abscisse DC des Conoids $= x = 4$ Ellen.

Auflösung.

$a = 3\frac{1}{3}$ Elle.
$b = 2\frac{1}{3}$ "
$x = 4$ "

$$Q = 0{,}5236 \cdot \frac{b^2 x^2}{a^2} (3a + 2x)$$

$$Q = 0{,}5236 \cdot \frac{(2\frac{1}{3})^2 \cdot 4^2}{(3\frac{1}{3})^2} (3 \cdot 3\frac{1}{3} + 8)$$

$$Q = 0{,}5236 \cdot \frac{\frac{7}{3} \cdot \frac{7}{3} \cdot 16 \cdot 18}{\frac{10}{3} \frac{0}{0}}$$

$$Q = 73{,}8904 \text{ K. Ellen} = 73 \text{ K. Ellen } 12308 \text{ K. Zoll.}$$

51ste Aufgabe.

Die erste Axe eines hyperbolischen Conoid's ADB Fig. 21, sei ED $= a = 4$ Ellen, die zweite Axe FG $= 2$ Ellen, und die Höhe oder Abscisse DC $= x = 6$ Ellen; Wie viel Quadratellen beträgt die Oberfläche $= F$ desselben?

Auflösung.

$a = 4$ Ellen.
$b = 2$ Ellen.
$x = 6$ Ellen.

Es möge in nachstehender Formel (A.) der Kürze halber $k = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$ und $\sqrt{m} = \sqrt{b^2 + 4ak^2x + 4k^2x^2}$ sein, so ist:

$$(A.)\ F = 0{,}7854.b\left[\left(\frac{2x+a}{a}\right)\sqrt{m} - b - \frac{a}{k} L.\left(\frac{(2x+a)k+\sqrt{m}}{ak+b}\right)\right]$$

I. Bestimmung der Werthe von k und $\sqrt{m}$.

$$1)\ k = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \frac{\sqrt{16+4}}{4} = \frac{\sqrt{20}}{4} = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{2{,}23606}{2} = 1{,}11803$$

$$\sqrt{m} = \sqrt{b^2+4ak^2x+4k^2x^2}$$

$$\sqrt{m} = \sqrt{2^2+4.4.\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2.6+4.\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2.6^2}$$

$$\sqrt{m} = \sqrt{4+\frac{16.5.6}{4}+4.\tfrac{1}{4}.36}$$

$$\sqrt{m} = \sqrt{4+120+180}$$

$$\sqrt{m} = \sqrt{304} = 17{,}435$$

Diese in 1) und 2) gefundenen Werthe in (A.) substituirt, geben

$$F = 0{,}7854.2\left[\frac{2.6+4}{4}.17{,}435 - 2 - \frac{4}{1{,}11803}.\times L.\left[\frac{(2.6+4).1{,}11803+17{,}435}{4.1{,}11803+2}\right]\right]$$

$$F = 1{,}5708\left[69{,}740 - 2 - 3{,}5777.L.\left[\frac{35{,}32348}{6{,}47212}\right]\right]$$

$$(B.)\ F = 1{,}5708\left[67{,}740 - 3{,}5777.L.\left[\frac{35{,}32348}{6{,}47212}\right]\right]$$

Log. 35,32348 = 1,5480576
49
9,8
1,5480635
Log. 6,47212 = 0,8110465
0,7370170 und

$$\begin{array}{rl} & 0{,}7370170 \\ \text{Modul} = & 2{,}302585 \\ \hline & 1{,}4740340 \\ & 2211051\,0 \\ & 14740\,2 \\ & 3685\,0 \\ & 589\,6 \\ & 36\,5 \end{array}$$

$$\text{L.}\left[\frac{35{,}32348}{6{,}47212}\right] = 1{,}6970442$$

Ferner:

$$\begin{array}{l} \text{Log. } 1{,}69704 = 0{,}2296818 \\ \qquad\qquad\qquad\quad 102 \\ \text{Log. } 3{,}5777 = 0{,}5536039 \end{array}$$

$$\text{Log.}\left[3{,}5777 \cdot \text{L.}\left[\frac{35{,}32348}{6{,}47212}\right]\right] = 0{,}7832959, \text{ hierzu gehört } 6{,}0715.$$

Diesen Werth in (V.) substituirt erhält man:

$$F = 1{,}5708\,[67{,}740 - 6{,}0715]$$

$$F = 1{,}5708 \cdot 61{,}6685$$

$$F = 96{,}8688 \square\text{Ellen} = 96 \square\text{Ellen } 500{,}4 \square\text{Zoll.}$$

Berechnung des Inhaltes und der Seitenfläche solcher Körper, welche durch Umdrehung einer regulairen krummen Linie um eine gerade entstehen, welche von der Axe der krummen Linie entfernt ist.

§. 17.

Es sei CB, Fig. 22, der Bogen oder Schenkel einer regulairen krummen Linie; CM ihre Axe; C der Scheitelpunkt derselben; CD eine Tangente, welche die krumme Linie im Scheitelpunkte C berührt. Wird nun DC zu einer Drehungsaxe angenommen, um die sich die krumme Linie CB bewegt, so wird dadurch ein trichterförmiger Raum AGB umgrenzt, welcher einwärts gekrümmt ist.

52ste Aufgabe.

Der Bogen CB, Fig. 22, möge einer Hyperbel angehören, zu welcher DC die Drehungsaxe und zugleich die Abscisse $= x = 3$ Ellen ist. Die der Hyperbel zugehörende erste Axe sei $= a = 5$ Ellen; die kleine Axe $= b = 2$ Ellen. Wie viel Kubikellen $= Q$ beträgt der Inhalt des durch die Umdrehung entstandenen concaven hyperbolischen Conoids ACB?

Auflösung.

$a = 5$ Ellen.
$b = 2$ „
$x = 6$ „

$$Q = 3{,}1416\,a^2\left[x\left(\frac{x^2}{3b^2+\frac{x}{2}}-\frac{\sqrt{b^2+4x^2}}{4b}\right)-\frac{b}{8}L.\left(\frac{2x+\sqrt{b^2+4x^2}}{b}\right)\right]$$

$$Q = 3{,}1416.25\left[6\left(\frac{36}{12+\frac{x}{2}}-\frac{\sqrt{4+144}}{8}\right)-\frac{2}{8}L.\left(\frac{12+\sqrt{4+144}}{2}\right)\right]$$

$$Q = 78{,}54\left[6\left(3\tfrac{x}{2}-\frac{\sqrt{148}}{8}\right)-\tfrac{x}{4}\,L.\left(\frac{12+\sqrt{148}}{2}\right)\right]$$

$$Q = 78{,}54\,[6 \cdot 1{,}9793 - \tfrac{x}{4}\,L.(12{,}08274)]$$

$$Q = 78{,}54\,[11{,}8758 - \tfrac{x}{4}\,L.\,12{,}08274]$$

Nun ist Log. 12,08274 = 1,0821888

	252
	14,4
1,0821654	
2,302585	
21643308	
3246496	2
21643	2
5410	5
865	6
54	0

$L.\,12{,}08274 = 2{,}4917777$

$\tfrac{x}{4}\,L.\,12{,}08274 = 0{,}6229444$

Diesen Werth in (A.) substituirt, giebt:

$$Q = 78{,}54\,[11{,}8758 - 0{,}6229444]$$

$$Q = 78{,}54 \cdot 11{,}2529$$

$Q = 883{,}802$ K. Ellen $= 883$ K. Ellen 11086 K. Zoll.

§. 18.

Die Seitenfläche eines concaven Conoids, wie Fig. 22, ist nur durch Hülfe einer unendlichen Reihe zu berechnen. Für den praktischen Gebrauch ist jedoch folgende Berechnungsweise vollkommen hinreichend, sobald die hierzu nöthigen Linien an dem Körper selbst oder an dessen Profil gemessen werden können.

Man theile deßhalb den Bogen CB = S in so viele gleiche Theile C, 1; 1, 2; 2, 3; ꝛc., daß die Chorden dieser gleichen Bogen den Bogen selbst, ohne merklichen Fehler gleich gesetzt werden können, und bezeichne jede, weil sie einander gleich sind, durch △S. Ferner messe man die Abstände der Theilungspunkte 1; 2; 3; ꝛc. von der Axe DC, nämlich I. 1; II. 2; III. 3 ꝛc., so ist, wenn die Seitenfläche des concaven Conoids = F gesetzt wird:

$$F = 3{,}1416 \cdot \triangle S. [y'''''' + 2(y' + y'' + y''' + y'''')]$$

Dieser allgemeine Ausdruck kann zur Berechnung der Seitenfläche jedes beliebigen krummlinigen Körpers angewendet werden.

53ste Aufgabe.

Der Bogen CB = S., Fig. 22, soll nach vorstehender Weise gemessen und die Chorde des 5ten Theiles vom Bogen CB = 5 Zoll = △S. sein. Der Abstand oder die Ordinate I. 1; = y' sei = $3\frac{1}{2}$ Zoll; II. 2; = y'' = 7 Zoll; III. 3; = y''' = 11 Zoll; IV. 4 = y'''' = $14\frac{1}{2}$ Zoll und DB = y''''' = $19\frac{1}{4}$ Zoll. Wie viel □Werkfuß und Zolle beträgt die Seitenfläche dieses Conoids?

Auflösung.

△S. = 5 Zoll.
y = $3\frac{1}{2}$ Zoll.
y'' = 7 Zoll.
y''' = 11 Zoll.
y'''' = $14\frac{1}{2}$ Zoll.
y''''' = $19\frac{1}{4}$ Zoll.

$F = 3{,}1416 \cdot \triangle S. [y'''' + 2(y' + y'' + y''' + y'''')]$

$F = 3{,}1416 \cdot 5 [19\frac{1}{4} + 2(3\frac{1}{2} + 7 + 11 + 14\frac{1}{2})]$

$F = 15{,}708 [19\frac{1}{4} + 72]$

$F = 1433{,}355$ □Zoll $= 9$ □W. Fuß 137,3 □Zoll.

§. 19.

Ist DB, Fig. 23, der Bogen einer Hyperbel, und dieser Bogen drehet sich um die auf dem Mittelpunkte H der Hyperbel senkrecht stehende Linie GH, so entsteht ein concaver hyperbolischer Conoid ACDB, wo der Halbmesser HD des untern Kreises = der halben ersten Axe ist. Wird der körperliche Inhalt dieses Conoids = Q, ferner HG als eine Abscisse = x, und GB als die ihr zugehörige Ordinate = y gesetzt; so erhält man

$$Q = 3{,}1416 \cdot a^2 x \left(\frac{1}{4} + \frac{x^2}{3b^2}\right)$$

54ste Aufgabe.

Die dem hyperbolischen Bogen DB, Fig. 23, zugehörende erste Axe DC sei = a = 2 Ellen 16 Zoll; die zweite Axe = b = 1 Elle 12 Zoll; die Höhe GH des Conoids, das ist, die Abscisse x, = 3 Ellen. Wie viel beträgt der körperliche Inhalt Q dieses Körpers an Kubikwerkfußen und Zollen?

Auflösung.

$a = 5\frac{1}{3}$ W. F.
$b = 3$ „
$x = 6$ „

$$Q = 3{,}1416 \cdot a^2 x \left(\frac{1}{4} + \frac{x^2}{3b^2}\right)$$

$$Q = 3{,}1416 \cdot \frac{256}{9} \cdot 6 \left(\frac{1}{4} + \frac{36}{27}\right)$$

$Q = 848{,}93$ K. W. F. $= 848$ K. W. F. 1607 K. Z.

55ste Aufgabe.

Es soll die Seitenfläche F, des in vorhergehender Aufgabe berechneten Conoids, gefunden werden.

Auflösung.

$a = 5\frac{1}{3}$ W.F.
$b = 3$ "
$x = 6$ "

Man setze der Kürze halben:

$$b^4 + 4(a^2+b^2)x^2 = m, \text{ so ist}$$

$$81 + 4\left(\frac{256}{9}+9\right)36 = m$$

$$81 + 5392 = 5473 = m \text{ und sodann}$$

$$F = 3{,}1416 \cdot \frac{a}{b^2}\left[\frac{x\sqrt{m}}{2} + \frac{b^4}{4\sqrt{a^2+b^2}} \cdot L.\left(\frac{2x\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{m}}{b^2}\right)\right]$$

$$F = 3{,}1416 \cdot \frac{5\frac{1}{3}}{9}\left[\frac{6\sqrt{5473}}{2} + \frac{81}{4\sqrt{(5\frac{1}{3})^2+9}} \cdot L.\left(\frac{2.6\sqrt{(5\frac{1}{3})^2+9}+\sqrt{5473}}{9}\right)\right]$$

(A.) $F = 1{,}8617\,[221{,}9392 + 3{,}30926 \cdot L.(16{,}3788)]$

Log. 16,3788 = 1,2142609
213
1,2142822
2,302585
2,4285644
3642846 | 6
24285 | 6
6071 | 0
971 | 2
60 | 5

L. 16,3788 = 2,795879

Log. L. 16,3788 = Log. 2,7959879 = 0,4465353
Log. 3,30926 = 0,5197309
0,9662662

hierzu gehört die Zahl 9,2526.

Diese Werthe in (A.) substituirt, erhält man:

$F = 1{,}8617\,[221{,}9392 + 9{,}2526]$
$F = 1{,}8617 \cdot 231{,}1918 = 430{,}4096$ □Werkfuß.

§. 20.

Wenn in Fig. 24, der Bogen DFB einer Ellipse, der größer als der Quadrant BF ist, sich um den, aus seinem Endpunkte gezogenen Perpendikel DC, herum bewegt, und GF die halbe große Axe $= \frac{1}{2}a$; GB die halbe kleine Axe $= \frac{1}{2}b$; CD die Drehungsaxe $= h$ und die Entfernung der Drehungsaxe von der großen Axe der Ellipse $= CG = c$ gesetzt wird; so entsteht ein Conoid AEDFBA mit der Vertiefung EDF, dessen körperlicher Inhalt Q mittelst nachstehenden allgemeinen Ausdruck zu berechnen ist.

$$Q = 3{,}1416.h\left[\left(\frac{1}{4}b^2 - \frac{b^2h^2}{3a^2}\right) + 0{,}7854.abc\left(3{,}1416 - \text{B.S.}\frac{2h}{a}\right)\right]$$

56ste Aufgabe.

Es sei die halbe große Axe des Quadranten $= FG = \frac{1}{2}a = 1\frac{1}{2}$ Werkfuß; die halbe kleine Axe $GB = \frac{1}{2}b = 1$ W.F.; die Entfernung der Drehungsaxe von der halben großen Axe, das ist CG, $= c = \frac{1}{2}$ W. F.; so ist die Drehungsaxe $DC = h = \frac{a}{b}\sqrt{(\frac{1}{4}b^2 - c^2)}$. Wie viel beträgt der körperliche Inhalt Q des Conoids AEDFB, Fig. 24.

Auflösung.

$a = 3$ W. F.
$b = 2$ „
$c = \frac{1}{2}$ „

Man bestimme zuförderst den Werth von $DC = h$

$$h = \frac{a}{b}\sqrt{\tfrac{1}{4}b^2 - c^2}$$

$$h = \frac{3}{2}\sqrt{\tfrac{1}{4}.4 - \tfrac{1}{4}}$$

$$h = \frac{3}{2}\sqrt{1 - \tfrac{1}{4}} = \tfrac{3}{2}\sqrt{\tfrac{3}{4}}$$

$$h = \frac{3}{4}\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{4} = 1{,}299 \text{ W.F.};$$ sodann ist

$$Q=3{,}1416.h\left(\tfrac{1}{4}b^2-\frac{b^2h^2}{3a^2}\right)+0{,}7854.abc\left(3{,}1416-\text{B.S.}\frac{2h}{a}\right)$$

$$Q=3{,}1416.\times 1{,}299\left(\tfrac{1}{4}.4-\frac{4.(1{,}299)^2}{3.9}\right)+0{,}7854.3.2.\tfrac{1}{2}\times\left(3{,}1416-\text{B.S.}\frac{2.1{,}299}{3}\right)$$

(A.) $Q=3{,}1416.1{,}299.0{,}7500+2{,}3562.(3{,}1416-\text{B.S.}0{,}866).$

Ausübung.

Lpg. $0{,}866=0{,}9375179-1$

10

Log. S. $0{,}866=9{,}9375179$, hierzu gehören $59°\ 59'\ 49''$

4577

$12{,}16\ |\ 602{,}00\ |\ 49''$

4864

$115{,}60$

Dieses Gradmaß in Theilen des Halbmessers = 1 ausgedrückt, giebt:

	$59°$	$=\ 1{,}02974426$
	$59'$	$=\ 0{,}01716240$
	$49''$	$=\ 0{,}00023756$
B.S. $0{,}866$		$=\ 1{,}04714422$

Ferner:

$3{,}1416$

$-1{,}0471$

$2{,}0945\times 2{,}3562=4{,}9350.$

Diesen letzteren Werth in (A.) substituirt, erhält man

$Q=3{,}1416.1{,}299.0{,}7500+4{,}9350$

$Q=3{,}0607+4{,}9350$

$Q=7{,}9957$ Kub. W. F. $=7$ K. W. F. 1720 K. Zoll.

57ste Aufgabe.

Der Bogen eines Kreises = BEC, Fig. 25, > als der Quadrant EC bewege sich um die senkrechte Linie BD = h. Die Entfernung dieser Drehungsaxe sei vom Halbmesser EG,

um DG = c = 1 Elle entfernt; sodann ist die Höhe BD = h = $\sqrt{r^2-c^2}$; wenn der Halbmesser = r (hier = 2 Ellen 8 Zoll) gesetzt wird. Wie viel Kubikellen beträgt der durch das Herumdrehen beschriebene Raum = Q?

Auflösung.

r = $2\frac{1}{3}$ Elle.
c = 1 „

$$h = \sqrt{r^2-c^2} = \sqrt{(\tfrac{7}{3})^2-1^2} = \sqrt{4\tfrac{4}{9}} = \frac{\sqrt{40}}{3} = 2{,}10818, \text{ und}$$

$$Q = 3{,}1416\left[h(r^2-\tfrac{1}{3}h^2)+cr^2(\pi-\text{B.S.}\left(\frac{h}{r}\right))\right]$$

$$Q = 3{,}1416\left[2{,}10818\left((2\tfrac{1}{3})^2-\tfrac{1}{3}.(2{,}10818)^2\right)+1.(2\tfrac{1}{3})^2\times\left(3{,}1416-\text{B.S.}\left(\frac{2{,}10818}{2\frac{1}{3}}\right)\right)\right]$$

$$Q = 3{,}1416\left[2{,}10818(5444444-1{,}481474)+1.5\tfrac{4}{9}\,[3{,}1416-\text{B.S. }0{,}903506]\right]$$

(A.) $Q = 3{,}1416\,[2{,}10818.3{,}96297+5\tfrac{4}{9}(3{,}1416-\text{B.S.}(0{,}903506)]$

Ausübung von $5\frac{4}{9}$ (3,1416 — B.S. (0,903506))

Log. 0,903506 = 0,9559282 — 1
29
0,9559311 — 1
+ 10
Log. S. 0,903506 = 9,9559311 = 64° 37′ 22″

9089
9,99 | 222,00 | 22″
199 8
222 0

Dieses Gradmaß, nach §. 3., in Theilen des Halbmessers = 1 ausgedrückt, giebt für

$64^{\circ} = 1{,}11701072$
$37' = 0{,}01076286$
$22'' = 0{,}00010666$

L. d. B. S. $0{,}903506 = 1{,}12788024$, folgl.

$5\frac{4}{7}(3{,}1416 - \text{B.S.}(0{,}903506)) = 5\frac{4}{7}(3{,}1416 - 1{,}12788) =$
$5\frac{4}{7} \times 2{,}01372 = 10{,}96358.$

Dieſen Werth in (A.) ſubſtituirt, erhält man:

$Q = 3{,}1416\,[2{,}10818 \,.\, 3{,}96297 + 10{,}96358]$
$Q = 3{,}1416\,(8{,}35465 + 10{,}96358)$
$Q = 3{,}1416 \,.\, 19{,}31823 = 60{,}69 \text{K.W.F.} = 60 \text{K.W.F.} 1192{,}3 \text{K.Z.}$

Berechnung des Inhaltes und der Oberfläche ringförmiger Körper.

§. 21.

Wenn in Fig. 26 die krumme Linie AEB mit ihrer Axe CE, ſo wie DH auf DB ſenkrecht ſtehend, in einer Ebene liegend, angenommen wird, und man denkt ſich DH als eine Drehaxe um die ſich die krumme Linie bewegt; ſo entſteht ein ringförmiger körperlicher Raum, deſſen Berechnung ſich nach den Geſetzen der krummen Linie richtet, welche in nachſtehendem allgemeinen Ausdruck zum Grunde gelegt ſind.

58ſte Aufgabe.

Das Profil eines ringförmigen Körpers AEB, Fig. 26, ſei eine Parabel, deren Abſciſſe oder Höhe CE = h = 8 Zoll, die Entfernung dieſer Linie von der Drehaxe DH = DC = c = 18 Zoll, und der Parameter der Parabel = p = 6 Zoll iſt. Wie viel Kubikellen = Q enthält der durch die kreisförmige Bewegung dieſer Parabel, um die Drehaxe DH entſtandene ringförmige Körper?

Auflöſung.

h = 8 Zoll.
c = 18 »
p = 6 »

$$Q = 8{,}3776 . ch\sqrt{p . h}$$
$$Q = 9{,}3776 . 18 . 8\sqrt{9 . 8}$$
$$Q = 8{,}3776 . 144 . 6{,}9282$$
$$Q = 8358 \text{ Kubikzoll.}$$

Anmerk. Bestände das Profil des Ringes, Fig. 26, aus einer doppelten Parabel AEBG, wo die zweite AGB der ersten ähnlich gleich ist; so würde der Inhalt des durch die Umdrehung entstehenden ringförmigen Körpers $Q = 16{,}755 . ch\sqrt{ph}$ sein.

59ste Aufgabe.

Es soll die Oberfläche des in vorhergehender Aufgabe durch die Parabel AEB beschriebenen ringförmigen Körpers unter der Bedingung gefunden werden, daß der Schenkel AE dem Schenkel EB ähnlich gleich ist.

Auflösung.

Es bezeichne S. die Länge des Bogens oder Schenkels EB $=$ EA, folglich ist die paraboliſche Linie AEB $= 2S.$ und nach der 7ten Aufgabe, wenn man in selbiger h statt x setzt.

$$2S. = \sqrt{ph + 4h^2} + \tfrac{1}{4} p L. \left(\frac{8h + p + 4\sqrt{ph + 4h^2}}{p} \right)$$

Die Oberfläche des Ringes $= F$ erhält man demnach durch den allgemeinen Ausdruck:

$h = 8$ Zoll $= \frac{2}{3}$ Fuß.
$c = 18$ " $= 1\frac{1}{2}$ "
$p = 6$ " $= \frac{1}{2}$ "

$$F = 6{,}2832 c \left[\sqrt{(p + 4h)h} + \tfrac{1}{4} p L. \left(\frac{8h + p + 4\sqrt{(p + 4h)h}}{p} \right) \right]$$

$$F = 6{,}2832 . 1\tfrac{1}{2} \left[\sqrt{(\tfrac{1}{2} + 4 . \tfrac{2}{3}) . \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{4} . \tfrac{1}{2}} . L. \left(\frac{8 . \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{2} + 4\sqrt{(\tfrac{1}{2} + 4 . \tfrac{2}{3}) . \tfrac{2}{3}}}{\tfrac{1}{2}} \right) \right]$$

$$F = 9{,}4248 \left[\frac{\sqrt{19}}{3} + \tfrac{1}{8} . L. \left(\frac{5\tfrac{1}{6} + 4\sqrt{\frac{19}{3}}}{\tfrac{1}{2}} \right) \right]$$

$$(A.)\ F = 9{,}4248 [1{,}4529 + \tfrac{1}{8} . L(23{,}2904)].$$

Log. 23,2904 = 1,3671695
.74
1,3671769
2,302585
2,7343538
4101530 | 7
27343 | 4
6835 | 5
1093 | 6
68 | 0
L. 23,2904 = 3,1480409
$\frac{1}{3}$ L. 23,2904 = 0,3935051

Diesen Werth in (A.) substituirt, giebt:

F = 9,4248 [1,4529 + 0,3935]
F = 9,4248.1,8464 = 17,4019 □W.F. = 17 □W.F. 57,8 □Z.

Anmerk. Sollte die mit der doppelten Parabel GAEB Fig. 26, beschriebene Außenfläche gefunden werden, so ist selbige:

$$2F = 12{,}5664.c\left[\sqrt{(p+4h)h} + \tfrac{1}{4}pL.\left(\frac{8h+p+4\sqrt{(p+4h)h}}{p}\right)\right]$$

Gehört endlich der innere Schenkel AE = S zu einer Parabel von anderen Dimensionen, so ist S' auf dieselbe Weise zu berechnen, und man erhält für die Außenfläche des mit der krummen Linie AEB beschriebenen Ringes = 6,2832 . c (S. + S.') so wie die Außenfläche des ganzen mit beiden Bogen EBG und EAG beschriebenen Ringes GAEB = 12,5664.c (S. + S.').

60ste Aufgabe.

Die krumme Linie AEB, Fig. 26, möge die Hälfte einer Ellipse sein, die sich um die Drehaxe DH herum bewegt, und dadurch einen elliptisch geformten Ring bildet. Es sei

CE = a = 4 Zoll, die halbe große Axe; CB = b = 3 Zoll, die halbe kleine Axe und die Entfernung DC = c = 6 Zoll; wie viel beträgt der körperliche Inhalt Q des mit der halben Ellipse beschriebenen Ringes?

Auflösung.

a = 4 Zoll.
b = 3 „
c 6 „

$$Q = 2{,}4673 . a . b . c$$
$$Q = 2{,}4673 . 4 . 3 . 6.$$
$$Q = 177{,}64 \text{ K. Zoll.}$$

Anmerk. Der körperliche Inhalt eines mit der ganzen Ellipse AEBGA beschriebenen Ringes ist daher = 4,9346 . abc.

61ste Aufgabe.

Die Oberfläche eines elliptischen Ringes = F, welcher wie in vorhergehender Aufgabe durch die halbe Ellipse AEB beschrieben worden ist, soll gefunden werden, wenn die Entfernung der Drehaxe von der Ellipse = DC = c = 20 Zoll als gegeben vorausgesetzt wird, und die beiden Schenkel EB = S. und EA = S.′ unmittelbar gemessen werden können. Es möge S. = S.′ = 16½ Zoll gefunden worden sein.

Auflösung.

Die Berechnung der Schenkel S. und S.′ könnte nach Anleitung der 27sten Aufgabe §. 9. mittelst der großen und kleinen Axe geschehen. Da die Entwickelung jedoch ziemlich mühsam ist; so kann für den praktischen Gebrauch, indem S. und S.′ unmittelbar zu messen sind, durch nachstehende Auflösung mit hinreichender Genauigkeit angewendet werden,

c = 20 Zoll.
S. = S.′ = 16½ Zoll.

$$F = 6{,}2832 \cdot c(S. + S')$$
$$F = 6{,}2832 \cdot 20(16\tfrac{1}{2} + 16\tfrac{1}{2})$$
$$F = 4146{,}912 \text{ □Zoll} = 28 \text{ □W. F. } 114{,}9 \text{ □Z.}$$

62ste Aufgabe.

Ein halber Kreis, dessen Halbmesser $= r = 4\frac{3}{8}$ Zoll ist, bewege sich um die Drehaxe HD, Fig. 26, und beschreibe einen ringförmigen Körper. Die Entfernung der Drehaxe DH sei vom Mittelpunkte C des Kreises $= DC = c = 18\frac{1}{2}$ Zoll. Wie viel Kubikzoll $= Q$ beträgt der körperliche Inhalt dieses Ringes?

$r = 4\frac{3}{8}$ Zoll.
$c = 18\frac{1}{2}$ „

$$Q = 9{,}8696 \cdot cr^2$$
$$Q = 9{,}8696 \cdot 18\tfrac{1}{2} \cdot (4\tfrac{3}{4})^2$$
$$Q = 4119{,}6 \text{ □Zoll.}$$

Anmerk. Geschähe die Bewegung um die Drehaxe mit einem ganzen Kreise, so würde unter vorstehender Beziehung der körperliche Inhalt des dadurch entstehenden Ringes $= 19{,}7392 \cdot cr^2$ sein.

63ste Aufgabe.

Die Oberfläche F eines mit dem halben Kreise vorhergehender Aufgabe beschriebenen Ringes soll mit Beibehaltung der dort angenommenen Dimensionen berechnet werden.

Auflösung.

$r = 4\frac{3}{8}$ Zoll.
$c = 18\frac{1}{2}$ „

$$F = 19{,}7392 \cdot c \cdot r.$$
$$F = 19{,}7392 \cdot 18\tfrac{1}{2} \cdot 4\tfrac{3}{4}.$$
$$F = 1597{,}641 \text{ □Zoll.}$$

Anmerk. Hätte sich ein ganzer Kreis um die Drehaxe bewegt; so ist die Außenfläche des dadurch entstehenden Ringes $= 39{,}4784 \cdot c \cdot r.$

Aufgaben,
den Inhalt eines jeden krummlinigen Körpers, durch Annäherung, aus seinem Profile zu bestimmen, welcher durch Drehung um eine Axe entstanden ist.

§. 27.

Man theile die Axe CG, Fig. 27, des Körpers ADEB in kleine, jedoch gleiche Theile C, 1; = 1; 2 = 2; 3; ꝛc. = m und messe die in der Ordnung aufeinander folgenden Ordinaten CB = y^0; 1, I. = y^I; 2, II. = y^{II}; 3, III. = y^{III} .... y^{n-1}; y^n; so erhält man die Formel für den körperlichen Inhalt ADEB = Q.

$$Q = 0{,}7854 \cdot m[(y^0+y^I)^2+(y_I+y^{II})^2 \ldots +(y^{n-1}+y^n)^2] + 0{,}2618 \cdot m[(y^2-y^I)^2+(y^I-y^{II})^2+(y^{II}-y^{III})^2 \ldots + (y^{n-1}-y^n)^2].$$

64ste Aufgabe.

Es sei CG = h = 12 Zoll die Axe eines krummlinigen Körpers ADEB, Fig. 27; dieselbe werde in n (hier in 6) gleiche Theile $\frac{h}{n} = m$ (hier in $\frac{12}{6} = 2$) getheilt; so ist m = 2 Zoll. Der untere Halbmesser CB sei = y^0 = 30″; 1, I. = y^I = 27″; 2, II. = y^{II} = 24″; 3, III. = y^{III} = 21″; 4, IV. = y^{IV} = 18″; 5, V. = y^V = 15″; GE = y^{VI} = 12″.

Auflösung.

m = 2″
y^0 = 30″
y^I = 27″
y^{II} = 24″
y^{III} = 21″
y^{IV} = 18″
y^V = 15″
y^{VI} = 12″

$$Q = 0{,}7854 \cdot m[(y^0+y^I)^2+(y^I+y^{II})^2+(y^{II}+y^{III})^2+(y^{III}+y^{IV})^2+(y^{IV}+y^V)^2+(y^V+y^{VI})^2] + 0{,}2618 \cdot m[(y^0-y^I)^2+(y^I-y^{II})^2+(y^{II}-y^{III})^2+(y^{III}-y^{IV})^2+(y^{IV}-y^V)^2+(y^V-y^{VI})^2]$$

$$
Q = \begin{cases} 0{,}7854.2 \begin{cases} (30+27)^2 = 57^2 = 3249 \\ (27+24)^2 = 51^2 = 2601 \\ (24+21)^2 = 45^2 = 2025 \\ (21+18)^2 = 39^2 = 1521 \\ (18+15)^2 = 33^2 = 1089 \\ (15+12)^2 = 27^2 = 729 \end{cases} \\ \qquad 1{,}5708 . 11214 = 17614{,}95 \\ +0{,}2618.2 \begin{cases} (30-27)^2 = 3^2 = 9 \\ (27-24)^2 = 3^2 = 9 \\ (24-21)^2 = 3^2 = 9 \\ (21-18)^2 = 3^2 = 9 \\ (18-15)^2 = 3^2 = 9 \\ (15-12)^2 = 3^2 = 9 \end{cases} \\ \qquad 0{,}5236 . 54 = 28{,}27 \end{cases}
$$

$$Q = 17643{,}22 \text{ K. Zoll.}$$

Berechnung hufförmiger cylindrischer Abschnitte.

§. 23.

Wenn ein Cylinder ALMB, Fig. 28, in schiefer Richtung geschnitten wird; so kann ein solcher Schnitt, wie EDF die Grundfläche vor dem Mittelpunkte C, oder wie GDH im Mittelpunkte selbst, oder wie IDK jenseit des Mittelpunktes treffen, oder wie ANDA dieselbe nur in ihrem Endpunkte berühren.

Die auf solche Weise abgeschnittenen Stücken des Cylinders, z. B. EDBF; GEBH ꝛc., werden wegen ihrer Gestalt **hufförmige Abschnitte** genannt.

65ste Aufgabe.

An dem cylindrischen hufförmigen Abschnitte EDBF, Fig. 29, sei die halbe Durchschnittlinie $EO = OF = a = 2$ Ellen; die Entfernung der Durchschnittlinie EF vom Punkte B diesseit des Mittelpunktes C, das ist $OB = b = 1$ Elle und die Höhe DB des Abschnittes $= h = 3$ Ellen. Wie

viel Kubikwerkfuß beträgt der körperliche Inhalt des Cylinderabschnittes EDBF = Q?

Auflösung.

OF = OE = a = 4 W. F.
OB = b = 2 W. F.
DB = h = 6 W. F.

$$Q = \frac{h}{b}\left[r^2a - \frac{1}{3}a^3 - (r-b)r^2\,\text{V.S.}\left(\frac{a}{r}\right)\right]$$

In diesem allgemeinen Ausdrucke ist

$$r = \frac{a^2+b^2}{2b} = \frac{16+4}{4} = \frac{20}{4} = 5, \text{ folgl.}$$

$$Q = \frac{6}{2}\left[25.4 - \frac{1}{3}.64 - (5-2).25\,\text{V.S.}\left(\frac{4}{5}\right)\right]$$

$$Q = 3\left[100 - \frac{64}{3} - 3.25.\,\text{V.S.}\left(\frac{4}{5}\right)\right]$$

(A.) $Q = 3\,[100 - 21{,}3333 - 75.\,\text{V.S.}\,0{,}8]$

Log. 0,8 = 0,9030900 − 1

Log. S. 0,8 = 9,9030900 = 53° 7′ 48″

15,80 | 764,00 | 48″
632 0
13200

Dieses Gradmaß in Theile des Halbmessers = 1 verwandelt, giebt:

für 53° = 0,92502450
7′ = 0,00203622
48″ = 0,00023271
V.S. $\frac{4}{5}$ = 0,92729343
× 75
463646715
649105401
75 . V.S. $\frac{4}{5}$ = 69,54700725.

Diesen Werth in (A.) substituirt, so erhält man:

$Q = 3\,[100 - 21{,}3333 - 69{,}5470]$
$Q = 3 . 9{,}1197 = 27{,}3591$ K. W. F. = 27 K. W. F. 620 K. Z.

66ste Aufgabe.

Der körperliche Inhalt Q eines hufförmigen Cylinderabschnittes GDBH, Fig. 30, dessen Durchschnittlinie GH durch den Mittelpunkt C der Grundfläche geht, soll berechnet werden; angenommen, daß der Halbmesser GC der Grundfläche = CB = CH = CB = r = 2 Ellen 6 Zoll, und die Höhe des Abschnittes = BD = h = 1 Elle 18 Zoll beträgt.

Auflösung.

$r = 2\frac{1}{4}$ Elle.
$h = 1\frac{3}{4}$ Elle.

$$Q = \frac{2}{3} r^2 h$$
$$Q = \frac{2}{3} \cdot (2\tfrac{1}{4})^2 \cdot 1\tfrac{3}{4}$$
$$Q = \frac{2}{3} \cdot \frac{81}{16} \cdot \frac{7}{4} = 5\tfrac{29}{32} \text{ K. E.} = 5 \text{ K.E. } 12528 \text{ K.Z.}$$

67ste Aufgabe.

Es soll der körperliche Inhalt Q eines hufförmigen Cylinderabschnittes IDBK, Fig. 31, gefunden werden, dessen Durchschnittlinie IK in der Grundfläche jenseit des Mittelpunktes C fällt. Es möge die halbe Durchschnittlinie PI = PK = a = 2 Werkfuß; der Abstand derselben vom Anfangspunkte der angenommenen Axe BA = PB = b = 4 Werkfuß, und die Höhe des Abschnittes = DB = h = 6 Werkfuß betragen.

Auflösung.

a = 2 W. F.
b = 4 " "
h = 6 " "

$$Q = \frac{h}{b}\left[r^2 a - \frac{1}{3}a^3 + (b-r)\, r^2 \text{ B.S.} \left(\frac{b-r}{r}\right)\right]$$

In diesem Ausdrucke ist:

$$r = \frac{a^2 + b^2}{2b} = \frac{4+16}{8} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2} = 2{,}5; \text{ daher}$$

$$Q = \frac{6}{4}\left[6{,}25 \cdot 2 - \tfrac{1}{3} \cdot 8 + (4-2{,}5) \cdot (2{,}5)^2 \text{ B.S.} \left(\frac{4-2{,}5}{2{,}5}\right)\right]$$

(A.) $Q = 1{,}5\,[12{,}5 - 2{,}6666 + 9{,}375 \text{ B.S. } 0{,}6]$

Log. 0,6 = 0,7781513 − 1

10

Log. S. 0,6 = 9,7781513, hierzu gehören 53° 8′ − 11″ = 53° 7′ 49″.

186

28,07 | 327,00 | 11″
280 7
463 0

Für das Gradmaß, in Theile des Halbmessers = 1 verwandelt, erhält man:

53° = 0,92502450
7′ = 0,00203622
49″ = 0,00023756

V. S. 0,6 = 0,92729
9,375
8,34561
27818 | 7
6490 | 4
463 | 5

9,375 . V. S. 0,6 = 8,69333

Diesen Werth in (A.) gesetzt, giebt:

Q = 1,5 [12,5 − 2,6666 + 8,6933]

Q = 1,5 . 18,5267 = 27,79 K. W. F. = 27 K. W. F 1365 K. Z.

68ste Aufgabe.

Wie viel beträgt der körperliche Inhalt Q eines hufförmigen cylindrischen Abschnittes ANDB, Fig. 32, welcher die Grundfläche in dem Punkte A berührt, wenn der Halbmesser des Cylinders AC = CB = r = 1 Elle 16 Zoll, und die Höhe DB = h = 2 Ellen 8 Zoll ist, an Kubikwerkfußen und Zollen?

Auflösung.

r = $3\frac{1}{3}$ W. F.
h = $4\frac{2}{3}$ " "

Q = 1,5708 r^2 h

Q = 1,5708 . $(3\frac{1}{3})^2$. $4\frac{2}{3}$.

Q = 1,5708 . $\frac{100}{9}$. $\frac{14}{3}$ = 81,4488 K. W. F. = 81 K. F. 755 K. Z.

69ste Aufgabe.

Der schief abgeschnittene Cylinder DABE, Fig. 33, soll in Hinsicht seines körperlichen Inhaltes Q berechnet werden. Der Halbmesser der Grundfläche sei $= AC = CB = r = 6$ Fuß, die kürzeste Seitenlinie $AD = a = 4$ Fuß, die längste ihr gegenüberstehende, $BE = b = 8$ Fuß.

Auflösung.

$r = 6$ Fuß
$a = 4$ „
$b = 8$ „

$$Q = 3{,}1416\left(\frac{a+b}{2}\right)r^2$$

$$Q = 3{,}1416\left(\frac{4+8}{2}\right)36$$

$$Q = 3{,}1416 \cdot 216 = 678{,}5856 \text{ K. F.} = 678 \text{ K. F. } 1011 \text{ K. Z.}$$

70ste Aufgabe.

Es soll der untere Theil ADEFI, Fig. 34, eines cylindrischen hufförmigen Abschnittes ADHBF, nach seinem körperlichen Inhalte berechnet werden, angenommen, daß der Schnitt ADHE unter dem Winkel $HAB = \alpha = 36°$ geschehen, ferner, daß die halbe Durchschnittlinie in der Grundfläche $IK = KF = a = 6$ Werkfuß, und die Entfernung derselben vom Berührungspunkte der Grundfläche $= AK = b = 4$ Werkfuß gegeben ist. Wie viel Kubikwerkfuße beträgt der körperliche Inhalt Q?

Auflösung.

$\alpha = 36°$
$a = 6$ W. F.
$b = 4$ „ „

$$Q = T.\alpha\left[\left(\frac{a^2+b^2}{2b}\right)^3 B.S.\left(\frac{2ab}{a^2+b^2}\right) - \frac{2}{3}a^3 - \frac{(a^2+b^2)(a^2-b^2)a}{4b^2}\right]$$

Man berechne zuförderst:

$$\left(\frac{a^2+b^2}{2b}\right)^3 = \left(\frac{36+16}{8}\right)^3 = \left(\frac{52}{8}\right)^3 = \left(\frac{13}{2}\right)^3 = (6{,}5)^3 = 274{,}625$$

$\left(\frac{2ab}{a^2+b^2}\right) = \frac{2.6.4}{36+16} = 0{,}9230769.$

$\frac{2}{3}\,a^3 = \frac{2}{3}.\ 216 = 144.$

$\frac{(a^2+b^2)(a^2-b^2)a}{4b^2} = \frac{(36+16)(36-16)6}{4.16} = \frac{52.20.6}{64} = 97{,}5.$

Diese Werthe in vorstehende Formel substituirt, geben:

(A.) T.36° [274,625. B.S. 0,9230769 — 144 — 97,5]

Log. T.36° = 0,8612610 — 1 = der Zahl 0,7265425.

Log 0,9230769 = 0,9652346 — 1

28

4,2

0,9652378 — 1 und

Log. S. 0,9230769 = 0,9652378 — 1

10

9,9652378 = 67° 22′ 48″

1953

8,78 | 425,00 | 48″

351 2

738 0

Dieses Gradmaß in Theile des Halbmessers = verwandelt, giebt:

67° = 1,16937060

22′ = 0,00639954

48″ = 0,00023271

1,17600285. Diesen Werth in (A.) gesetzt, so ist:

Q = 0,7265 [274,625 . 1,176 — 144 — 97,5]

Q = 0,7265 [322,959 — 241,5]

Q = 0,7265.81,459 = 59,1799 K.W.F. = 59 K.W.F. 310 K.3.

Berechnung

eines Cylindertheils, wenn eine Ebene den Cylinder in schiefer Richtung schneidet, so daß dadurch die obere und untere Kreisfläche getroffen wird.

§. 24

Man denke sich in Fig. 35 die Höhe bB bis zum ergänzenden Schnitte DdHeE verlängert; so entstehen zwei Hufe-

förmige Abschnitte DdHeEB und dHbe, wovon die eine Durchschnittlinie DE jenseit, und die andere de, diesseit des Mittelpunktes C zu liegen kommt.

Es ist leicht begreiflich, daß hierbei mehrere Combinationen der Lage dieser Schnitte gegen einander stattfinden können; für selbige sind jedoch in vorhergegangenen Aufgaben, die allgemeinen Ausdrücke anzutreffen und zu substituiren.

Der Inhalt des kleinern Abschnittes dHbe möge mit Q' und die zur Berechnung nothwendigen Dimensionen mit r', a', b'; ferner der Inhalt des größern hufförmigen Abschnittes DdHeEB mit Q, und seine gleichnamigen Dimensionen mit r, a, b bezeichnet sein. Weil aber die Höhe $HB = h$ an dem Cylinder nicht unmittelbar zu messen ist, wohl aber der Winkel $HGB = \alpha$, so substituire man $T.\alpha$ statt $\frac{h}{b}$ in die Formeln der vorhergehenden Aufgaben.

Deßhalb ist nach obiger Bedingung und der 67sten Aufgabe

$$Q = T.\alpha\left[r^2 a - \tfrac{1}{3}a^3 + (b-r)r^2\ B.\mathfrak{S}.\left(\frac{b-r}{r}\right)\right]$$

und nach der 65sten Aufgabe

$$Q = T.\alpha\left[r^2 a' - \tfrac{1}{3}a'^3 - (r-b')r^2\ B.S.\left(\frac{a'}{r}\right)\right]$$

Folglich der körperliche Inhalt des Cylindertheiles DdbeEB

$$U = [Q-Q'] = T.\alpha\left[\left[r^2 a - \tfrac{1}{3}a^3 + (b-r)r^2 B.\mathfrak{S}.\left(\frac{b-r}{r}\right)\right] - \left[r^2 a' - \tfrac{1}{3}a'^3 - (r-b')r^2\ B.S.\left(\frac{a'}{r}\right)\right]\right]$$

Die Ausübung zu Fig. 35 wird hinreichend sein, um die für andere Lagen der Durchschnittlinien DE und de, aus vorstehenden Aufgaben herzuleiten. Fielen z. B. beide Durchschnittlinien auf ein und dieselbe Seite des Mittelpunktes C, so wäre unter obigen Bezeichnungen nach Anleitung der 5ten Aufgabe:

$$(Q-Q') = T.\alpha\left[\left[r^2a-\tfrac{1}{3}a^3-(r-b)r^2\,\text{V.S.}\frac{a}{r}\right]-\left[r^2a'-\tfrac{1}{3}a'^3-(r-b')r^2\,\text{V.S.}\frac{a'}{r}\right]\right]$$

Ginge hingegen die Durchschnittlinie DE durch den Mittelpunkt C, und de wäre diesseit des Mittelpunktes C; so ist nach der 66sten und 65sten Aufgabe, wenn in ersterer $h = rT.\alpha$ gesetzt wird,

$$(Q-Q') = T.\alpha\left[\tfrac{2}{3}r^3-\left[r^3a'-\tfrac{1}{3}a'^3-(r-b')r^2\,\text{V.S.}\frac{a'}{r}\right]\right]$$

71ste Aufgabe.

Wie viel Kubikwerkfuß beträgt der Inhalt des Cylindertheiles DdbeEB $= U$ Fig. 35, wenn die Durchschnittlinien DE und de die untere und obere Kreisfläche treffen? Gegeben sei $AC = CB = r = 4'$; $GD = DE = a = 3'$ $GB = b = 5'$; ferner $dg = ge = a' = 1'$; $gb = b' = \frac{1}{2}'$ Decimalmaß, und der $< HGB = \alpha = 40°$.

Auflösung.

$\alpha = 40°$
$r = 4'$
$a = 3'$
$b = 5'$
$a' = 1'$
$b' = \frac{1}{2}'$

$$U = T.\alpha\left[\left[r^2a-\tfrac{1}{3}a^3+(b-r)r^2\,\text{V.S.}\left(\frac{b-r}{r}\right)\right]-\left[r^2a'-\tfrac{1}{3}a'^3-(r-b')r^2\,\text{V.S.}\left(\frac{a'}{r}\right)\right]\right]$$

$$U = T.40°\left[\left[16.3-\tfrac{1}{3}.27+(5-4)16\,\text{V.S.}\left(\frac{5-4}{4}\right)\right]-\left[16.1-\tfrac{1}{3}.1-(4-\tfrac{1}{2})16\,\text{V.S.}\left(\tfrac{1}{4}\right)\right]\right]$$

$$U = 0{,}83909\left[[48-9+16\,\text{V.S.}\tfrac{1}{4}]-[15{,}6666-56\,\text{V.S.}\tfrac{1}{4}]\right]$$

$$(\text{A.})\ U = 0{,}83909\left[[39+16\,\text{V.S.}\,0{,}25]-[15{,}6666-56\,\text{V.S.}\,0{,}25]\right]$$

$$\text{Log. } 0{,}25 = 0{,}3979400 - 1$$
$$10$$
$$\text{Log. S. } 0{,}25 = 9{,}3979400$$

Zum Log. S. 0,25 = 9,3979400 gehören 75° 32′—39″ = 75° 31′ 21″ (B.)

$$\begin{array}{r|l|l} & 6215 & \\ 81{,}57 & 3185{,}00 & 39'' \\ & 2447\,1 & \\ \hline & 7379\,0 & \end{array}$$

Zum Log. S. 9,3979400 gehören 14° 28′ 39″ (C.)

$$\begin{array}{r|l|l} & 6215 & \\ 81{,}57 & 3185{,}00 & 39'' \\ & 2447\,1 & \\ \hline & 7379\,0 & \end{array}$$

Das Gradmaß aus (B.) in Theile des Halbmessers = 1 verwandelt, giebt:

$$\begin{array}{rcl} \text{für } 75^\circ & = & 1{,}30899694 \\ \text{„ } 31' & = & 0{,}00901753 \\ \text{„ } 21'' & = & 0{,}00010181 \\ \hline \text{(D.) B.S. } 0{,}25 & = & 1{,}31811628 \end{array}$$

Das Gradmaß aus (C.) ebenfalls in Theilen des Halbmessers = 1 ausgedrückt, erhält man

$$\begin{array}{rcl} \text{für } 14^\circ & = & 0{,}24434610 \\ \text{„ } 28' & = & 0{,}00814487 \\ \text{„ } 39'' & = & 0{,}00018908 \\ \hline \text{(E.) B.S. } 0{,}25 & = & 0{,}25268005 \end{array}$$

Die Werthe von (D.) und (E.) in (A.) substituirt, geben:

$$U = 0{,}83909[[39 + 16.1{,}31811628] - [15{,}6666 - 56.0{,}25268005]]$$
$$U = 0{,}83909[60{,}0899 - 1{,}5165]$$
$$U = 0{,}83909 . 58{,}5734 = 49{,}14834^{c'} = 49^{c'}\,148{,}34^{c''}.$$

Berechnung
des Inhaltes hufförmiger Abschnitte, prismatischer Körper, welche eine elliptische oder parabolische Fläche zur Grundfläche haben.

§. 25.

Der Bogen EBF, Fig. 29, sei eine Parabel, deren Scheitelpunkt = B, und BA die Axe ist. Sodann ist ELKMFB

ein prismatischer Körper, welcher die Fläche der Parabel EBF zur Grundfläche hat. EDBF stelle den hufförmigen parabolischen Abschnitt vor, an welchem die Abscisse BO = x; OE = OF die ihr zugehörige Ordinate = y und DB = h die Höhe des Abschnittes bezeichnen möge.

72ste Aufgabe.

Es soll der körperliche Inhalt Q des hufförmigen paraboliſchen Abschnittes EDBF, Fig. 29, berechnet werden, dessen Abscisse BO = x = 15 Zoll; die Ordinate EO = OF = y = 18 Zoll, und die Höhe DB = h = 1 Elle ist; wie viel Kubikwerkfuß enthält derselbe?

Auflösung.

$x = 1\frac{1}{4}$ W. F.
$y = 1\frac{1}{4}$ " "
$h = 2$ " "

$$Q = 0{,}5333\ h.x.y$$
$$Q = 0{,}5333 . 2 . 1\tfrac{1}{4} . 1\tfrac{1}{4}$$
$$Q = 1{,}999 = 2\ K.\ W.\ F.$$

§. 26.

Die Grundfläche AGBHA, Fig. 28, sei eine Ellipse, deren halbe Axe CG = CK = $\frac{1}{2}$a, die halbe kleine Axe CB = CA = $\frac{1}{2}$b ist; auch möge DB = h, die Höhe des hufförmigen elliptischen Abschnittes EDBF oder GDBH ꝛc. bezeichnen.

73ste Aufgabe.

Wie viel beträgt der körperliche Inhalt Q des hufförmigen elliptischen Abschnittes EDBF, Fig. 29, dessen Durchschnittlinie EF in die Grundfläche vor dem Mittelpunkte C fällt, wenn der Abstand derselben von dem Mittelpunkte C, = CO = c = 2 Fuß; die halbe Durchschnittlinie OE = OF = m = 3 Fuß; die halbe große Axe CG = CH = $\frac{1}{2}$a = $2\frac{1}{2}$ Fuß; die halbe kleine Axe CB = CA = $\frac{1}{2}$b = 2 Fuß, und der Neigungswinkel des Abschnittes DOB = α = 54° ist

Auflösung.

$a = 5$ Fuß.
$b = 4$ „
$c = 2$ „
$m = 3$ „
$\alpha = 54°$

$$Q = T.\alpha\left[\tfrac{1}{4}b^2m - \frac{b^2}{3a^2}m^3 - \tfrac{1}{4}abc\,\text{B.S.}\frac{2m}{a}\right]$$

$$Q = T.54°\left[\tfrac{1}{4}.16.3 - \frac{16}{3.25}.27 - \tfrac{1}{4}.5.4.2.\text{B.S.}\left(\frac{2.3}{5}\right)\right]$$

(A.) $Q = 1{,}3764\,[12 - 5{,}76 - 10\,\text{B.S.}\,1{,}2]$.

$$\text{Log. } 1{,}2 = 0{,}0791812 - 1$$
$$10$$
$$\text{Log. S. } 1{,}2 = 9{,}0791812 = 6°\ 53'\ 31''$$
$$6310$$
$$174{,}24\,|\,5502{,}00\,|\,31''$$
$$5227\,2$$
$$274\,80$$

Dieses Gradmaß in Theile des Halbmessers $= 1$ verwandelt, ist:

$$6° = 0{,}10471976$$
$$53' = 0{,}01541708$$
$$31'' = 0{,}00015029$$
$$\text{B.S. } 1{,}2 = 0{,}12028713.$$

Vorstehenden Werth in (A.) gesetzt, giebt:

$$Q = 1{,}3764\,[12 - 5{,}76 - 10.0{,}12029]$$
$$Q = 1{,}3764\,[12 - 6{,}9629]$$
$$Q = 1{,}3764.5{,}0371 = 6{,}9330 \text{ K. F.} = 6 \text{ K. F.}\ 1612 \text{ K. Z.}$$

Anmerk. Würde hingegen AB, Fig. 28, zur großen Axe und GH zur kleinen Axe angenommen; so verwechsle man in vorstehender Formel a mit b, und man erhält für den körperlichen Inhalt des hufförmigen elliptischen Abschnittes EDBF,

$$Q = T.\alpha\left[\tfrac{1}{4}a^2m - \frac{a^2}{3b^2}m^3 - \tfrac{1}{4}abc\,\text{B.S.}\frac{2m}{b}\right]$$

74ste Aufgabe.

Wenn GHB, Fig. 30, eine halbe Ellipse vorstellt und die Durchschnittslinie GH des hufförmigen elliptischen Abschnittes GDHB den Mittelpunkt C schneidet; wie groß ist der körperliche Inhalt Q desselben in Kubikellen, angenommen, daß die halbe große Axe CG = CH = $\frac{1}{2}$a = 20 Zoll, die halbe kleine Axe CB = CA = $\frac{1}{2}$b = 10 Zoll, und die Höhe des Abschnittes = DB = h = 2 Ellen 6 Zoll ist?

Auflösung.

a = $1\frac{2}{3}$ Elle.
b = $\frac{5}{6}$ "
h = $2\frac{1}{4}$ "

$$Q = \frac{5}{6}abh$$
$$Q = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{9}{4}$$
$$Q = 0{,}52083 \text{ K.E.} = 7199{,}95 \text{ K.Z.} = 7200 \text{ K.Z.}$$

75ste Aufgabe.

Der schiefe Schnitt ANDA, Fig. 32, des elliptischen Cylinders berühre dessen Grundfläche in dem Endpunkte A der großen Axe; wie viel Kubikwerkfuß beträgt der körperliche Inhalt Q des hufförmigen Abschnittes ANDBA, wenn die halbe große Axe AC = CB = $\frac{1}{2}$a = 18 Zoll, die halbe kleine Axe CG = CH = $\frac{1}{2}$b = 12 Zoll, und die Höhe des Abschnittes = DB = h = 1 Elle ist?

Auflösung.

a = $2\frac{2}{3}$ Elle.
b = $1\frac{1}{3}$ "
h = $2\frac{1}{3}$ "

$$Q = 0{,}3927 . abh$$
$$Q = 0{,}3927 . 3 . 2 . 2$$
$$Q = 4{,}7124 \text{ K.W.F.} = 4 \text{ K.W.F. } 1231 \text{ K.Z.}$$

76ste Aufgabe.

Der schiefe Schnitt ANDA, Fig. 28, des elliptischen Cylinders, berühre die kleine Axe AB der Grundfläche in A.

Es soll der körperliche Inhalt Q des hufförmigen Abschnittes ANDBA gefunden werden, wenn die halbe kleine Axe AC = CB = $\frac{1}{2}$b = 18 Zoll; die halbe große Axe CG = CH = $\frac{1}{2}$a = 1 Elle 8 Zoll, und die Höhe des Abschnittes = DB = h = 2 Ellen 4 Zoll beträgt.

Auflösung.

a = $2\frac{2}{3}$ Elle.
b = $1\frac{1}{2}$ „
x = $2\frac{1}{6}$ „

Hierzu dienet ebenfalls die Formel der vorhergehenden Aufgabe.

$$Q = 0{,}3927 . a . b . h$$
$$Q = 0{,}3927 . 2\tfrac{2}{3} . 1\tfrac{1}{2} . 2\tfrac{1}{6}$$
$$Q = 3{,}4034 \text{ K. E.} = 3 \text{ K. E. } 5576 \text{ K. Z.}$$

Berechnung der krummen Seitenfläche hufförmiger Cylinder-Abschnitte.

§. 27.

77ste Aufgabe.

Es soll die krumme Seitenfläche GDHBG = F des hufförmigen Abschnittes GDHB, Fig. 30, gefunden werden, wenn die Grundfläche des Cylinders eine Ellipse ist, und die Durchschnittslinie GH durch ihren Mittelpunkt C geht, ferner die große Axe AB = a = 6 Fuß, die kleine Axe GH = b = 3 Fuß Decimalmaß, und der Neigungswinkel DCB = α = 72° ist.

Auflösung.

a = 6 Fuß.
b = 3 „
α = 72°

$$F = \tfrac{1}{4} a\,T.\circ\left[a + \frac{b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}.\,L.\left(\frac{\sqrt{(a^2-b^2)}+a}{b}\right)\right]$$

$$F = \tfrac{1}{4}.6.T.72^\circ\left[6 + \frac{9}{\sqrt{(36-9)}}.\,L.\left(\frac{\sqrt{(36-9)}+6}{3}\right)\right]$$

(A.) $F = 1{,}5.3{,}07768\,[6 + 1{,}73205\,.\,L.\,(3{,}73205)]$.

Log. 3,73205 = 0,5719416
59
0,5719475
Modul = 2,302585
1,1438950
1715842 | 5
11438 | 8
2859 | 5
456 | 8
28 | 5
1,3169576
1,73205
1,3169576
9218703 | 2
395087 | 1
26339 | 0
658 | 0
2,2810363

Diesen letzteren Werth in (A.) gesetzt, macht:

$F = 1{,}5.3{,}07768\,[6 + 2{,}28103]$
$F = 4{,}61652\,.\,8{,}28103$
$F = 38{,}2295$ K.W.F. = 38 K.W.F. 396 K.Z.

78ste Aufgabe.

Die Grundfläche des Cylinders, Fig. 30, sei ein Kreis; die Durchschnittlinie GH des hufförmigen Abschnittes gehe durch den Mittelpunkt C der Grundfläche; ferner sei der Durchmesser der Grundfläche = GH = AB = d = 1 Elle 16 Zoll, und der Neigungswinkel des Abschnittes = DCB = α = 45°; wie viel Quadratwerkfuß beträgt die gekrümmte Seitenfläche GDHBG = F des Abschnittes?

Auflösung.

$d = 3\frac{1}{2}$ W. F.

$\alpha = 45°$.

$$F = \frac{d^2}{2} \cdot T.\alpha$$

$$F = \frac{(3\frac{1}{2})^2}{2} \cdot T.45°$$

$$F = \frac{100}{18} \cdot 1$$

$F = 5{,}5555$ □W. F. = 5 □W. F. 79,99 □Zoll.

79ste Aufgabe.

Der Bogen EBF der Grundfläche eines prismatischen Körpers, Fig. 29, sei eine Parabel, deren Abscisse $BO = x = 2$ Ellen; der ihr zugehörige Parameter $= p = 1$ Elle, und der Neigungswinkel des Abschnittes $DOB = \alpha = 50°$ ist; wie viel Quadrat-Ellen beträgt die gekrümmte Seitenfläche $EDFBE = F$ des hufförmigen Abschnittes?

Auflösung.

$x = 2$ Ellen.

$p = 1$ Elle.

$\alpha = 50°$.

$$F = T.\alpha\left[\left(x - \frac{8x+p}{16}\right)\sqrt{px+4x^2} + \frac{1}{4}\left(x+\frac{p}{16}\right)p.L.\left(\frac{8x+p+4\sqrt{px+4x^2}}{p}\right)\right]$$

$$F = T.50°.\left[\left(2 - \frac{16+1}{16}\sqrt{2+16} + \frac{1}{4}\left(2+\frac{1}{16}\right)1.L.\left(\frac{16+1+4\sqrt{2+16}}{1}\right)\right]\right.$$

$$F = T.50°\left[(2-1{,}0625)\sqrt{18} + \frac{1}{4}(2{,}0625).L.(17+4\sqrt{18})\right]$$

(A.) $F = 1{,}19175\,[0{,}9375 \cdot 4{,}24264 + 0{,}5156 \cdot L.33{,}97056]$

Log. 33,97056 = 1,5310955

64

7,7

1,5311026

1,5311026
Modul = 2,302585
3,0622052
4593307 8
30622 0
7655 5
1224 8
76 5

L. 33,97056 = 3,5254938 und
0,5156 L. 33,97056 = 1,817744.

Diesen letztern Werth in (A.) gesetzt, ist:

F = 1,19175 [0,9375 . 4,24264 + 1,8178]

F = 1,19175.5,7953 = 6,9065 □Ellen = 6 □El. 522 □Zoll.

Berechnung des Inhaltes und der Oberflächen kuppelförmiger Körper.

§. 28.

Kuppelförmig wird ein Körper genannt, der eine regulaire krummlinige Fläche, wie z. B. in Fig. 36, einen Kreis, eine Ellipse ꝛc., oder wie in Fig. 37, ein regulaires oder irregulaires Vieleck zur Grundfläche hat und sich in einer Spitze endiget, oder oben mit einer, mit der Grundfläche parallelen Ebene geschlossen ist.

Die an dem kuppelförmigen Körper, Fig. 37, aus den Eckpunkten des Vielecks, E, F, G, H, ꝛc. bis zur Spitze L sich erhebenden krummen Linien, die einem Kreise, einer Ellipse ꝛc. zugehören können, erhalten die Benennung Grathe oder Kanten, und begrenzen, so bald die Grundfläche ein regulaires Polygon und die Axe LM in dessen Mittelpunkt M errichtet ist, ähnlich gleiche Flächen ELF, FLG ꝛc.

Wäre z. B. die Grundfläche ABEHGD, Fig. 38, ein regulaires n (= 6) Eck, folglich der Centriwinkel ACB = $\frac{360°}{n} = \frac{360°}{6} = 60°$, und die Kanten des kuppelförmigen Körpers = AF, BF ꝛc. Quadranten eines Kreises, deren ge-

meinschaftlicher Mittelpunkt in C liegt; so ist die allgemeine Formel für den kubischen Inhalt Q dieses Körpers:

$$Q = \tfrac{1}{3}\, nr^3\, S.\, \frac{360°}{n}.$$

80ste Aufgabe.

Die Kuppel eines Thurmes, Fig. 38, hat ein regulaires $n = 6$ Eck zur Grundfläche, wovon der Halbmesser des ihm zugehörigen Kreises $CA = CB$ ꝛc. $= r = 12$ Ellen 12 Zoll ist; die Kanten AF, BF ꝛc. sind Quadranten eines und desselben Kreises, so daß die Axe CF ebenfalls $= r = 12$ Ellen 12 Zoll ist; wie viel Kubikellen beträgt der Inhalt des kuppelförmigen Körpers?

Auflösung.

$n = 6$; folgl.

$$\frac{360}{n} = \frac{360}{6} = 60°$$

$r = 12\frac{1}{2}$ Elle.

$$Q = \tfrac{1}{3}\, nr^3\, S.\frac{360}{n}$$

$$Q = \tfrac{1}{3}.6.\left(\frac{25}{2}\right)^3.S.60°$$

$$Q = 2.(12{,}5)^3.0{,}8660254$$

$$Q = 3382{,}91077\ K.E. = 3382\ K.E.\ 10000\ K.Zoll.$$

81ste Aufgabe.

Wäre der Halbmesser des, dem regulairen Vielecke zugehörigen Kreises, wie in vorhergehender Aufgabe, $= r = 12$ Ellen 12 Zoll, die Grundfläche hingegen ein regulaires 8 Eck; wie viel würde, unter übrigens gleichen Bedingungen, der kubische Inhalt des kuppelförmigen Körpers betragen?

Auflösung.

$n = 8$

$$\frac{360}{n} = \frac{360}{6} = 45°$$

$r = 12\frac{1}{2}$ Elle $= 12{,}5$ Elle.

$$Q = \tfrac{1}{3}\,nr^3 . S.\frac{360}{n}$$

$$Q = \tfrac{1}{3} . 8 . (12{,}5)^3 . S.45°$$

$$Q = 3682{,}8476\ \square E. = 3682\ \square E.\ 11717\ \square Z.$$

Anmerk. Aus diesen beiden Beispielen ersieht man schon, wie bei Berechnung einer Kuppel, welche ein jedes andere regulaire Vieleck zur Grundfläche haben kann, verfahren werden muß; so bald die Grathe, Quadranten eines Kreises sind.

82ste Aufgabe.

Es soll die Oberfläche DABEF, der Kuppel Fig. 38. = F nach den Bedingungen der 80sten und 81sten Aufgabe berechnet werden, wenn die Grundfläche ein regulaires n Eck ist und die Kanten AF, BF ꝛc. Quadranten eines Kreises sind, deren Mittelpunkt C, in das Centrum des regulairen Vielecks fällt.

Auflösung.

Der allgemeine Ausdruck zur Berechnung der Oberfläche DABEF = F, für ein regulaires n Eck als Grundfläche ist:

$$F = \tfrac{1}{2}\,nr^2\left[S.\left(\frac{360°}{n}\right) + \mathfrak{B}.\left(\frac{360°}{n}\right)\right]$$

1) Berechnung der Oberfläche der Kuppel zur 80sten Aufgabe.

$n = 6$

$$\frac{360°}{n} = \frac{360°}{6} = 60°$$

$r = 12{,}5$ Elle.

$$F = \tfrac{1}{2} . 6 . (12{,}5)^2 [S.60° + \mathfrak{B}.60°]$$

$$F = 3 . 156{,}25\,[S.60° + \mathfrak{B}.60°]$$

Der Bogen von 60° in Theilen des Halbmessers = 1, ist = 1,0471975; ferner

$$\text{Log. } S.60° = 0{,}9375306 - 1, \text{ hierzu gehört}$$

$$S.60° = 0{,}86602 \text{ und}$$

$$\mathfrak{B}.60° = 1{,}04719$$

$$[S.60° + \mathfrak{B}.60° = 1{,}91321$$

Log. [S. 60° + V. 60°] = Log. 1,91321 = 0,2817627
Log. 156,25 = 2,1938200
Log. 3 = 0,4771213
Log. F = 2,9527040 und
F = 896,8174 □E. 896 □E. 470 □Zoll.

2) Berechnung der Oberfläche der Kuppel zur 81sten Aufgabe.

$n = 8$

$\frac{360}{n} = \frac{360}{8} = 45°$

$r = 12,5$

$F = \frac{1}{2} . 8 . (12,5)^2 [S. 45° + V. 45°]$

$F = 4 . 156,25 [S. 45° + V. 45°]$

Log. S. 45° = 0,8494850 — 1 und
S. 45° = 0,70710
V. 45° f. d. Halb. = 1 ist = 0,78539
(S. 45° + V. 45°) = 1,49249

Log. [S. 45° + V. 45°] = Log. 1,49249 = 0,1739114
Log. 156,25 = 2,1938200
Log. 4 = 0,6020600
Log. F = 2,9697914
F = 932,80622 □E. = 932 □Ellen 463 □Zoll.

Berechnung

des kubischen Inhaltes und der Außenflächen solcher Kuppeln, welche ein regulaires Vieleck DABE, Fig. 39, zur Grundfläche haben und die Kanten DF, AF ꝛc. Bogen eines Kreises sind, deren Mittelpunkte in der Ebene des Bogens jenseit des Centrums C vom Vielecke zu liegen kommen; und deshalb die Höhe CF der gemeinschaftliche Sinus dieser Bogen ist.

§. 29.

Es sei in Fig. 39 der Centriwinkel ACB = ∠ BCE = $\left(\frac{360°}{n}\right)$; die Höhe der Kuppel CF = h; der Halbmesser

womit die Kreisbogen FD, FA, ꝛc. beſchrieben ſind = R, und der Halbmeſſer, welcher den regulairen Polygon DABE zugehört, das iſt CE = CB ꝛc. = r; ſo iſt, wenn Q den körperlichen Inhalt der Kuppel DFEBA bezeichnet:

$$Q = \tfrac{1}{2}\,n\,S.\left(\frac{360^\circ}{n}\right)\left[(R^2-\tfrac{1}{3}h^2)h-R^2(R-r)\,\text{V.S.}\left(\frac{h}{R}\right)\right]$$

83ſte Aufgabe.

Die Kuppel eines Thurmes habe ein regulaires 6 Eck zur Grundfläche, wovon der Halbmeſſer des ihm zugehörigen Kreiſes CE = r = 10 Ellen; die Höhe der Kuppel = CF = h = 32 Ellen und der Halbmeſſer, womit die Kreisbogen, FE, FB ꝛc. beſchrieben ſind = R = $\frac{h^2+r^2}{2r} = \frac{32^2+100}{2.10}$ = 56,2 Elle beträgt. Wie viel Kubikellen enthält der körperliche Inhalt Q der Kuppel?

Auflöſung.

R = 56,2 Ellen.
n = 6, folgl.
$\frac{360^\circ}{n} = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$
r = 10 Ellen.
h = 32 „

$$Q=\tfrac{1}{2}.6.S.\left(\frac{360^\circ}{n}\right)\left[(R^2-\tfrac{1}{3}h^2)h-R^2(R-r)\,\text{V.S.}\left(\frac{h}{R}\right)\right]$$

$$Q=3.S.60^\circ\left[(56{,}2^2-\tfrac{1}{3}.32^2)32-56{,}2^2(56{,}2-10)\,\text{V.S.}\left(\frac{32}{56{,}2}\right)\right]$$

$$(\text{A.})\;Q=3.0{,}86602\,[90147{,}52-145919{,}93\,\text{V.S.}\left(\frac{32}{56{,}2}\right)]$$

$$+1$$

$$\text{Log.}\frac{32}{56{,}2} = 1{,}5051500 - 1$$

$$1{,}7497363$$

$$0{,}7554137 - 1$$

$$+10$$

$$\text{Log. S.}\frac{32}{56{,}2} = 9{,}7554137, \text{ hierzu gehört } 34^\circ\ 42'\ 29''.$$

$$\begin{array}{r} 3256 \\ 30{,}40 \overline{)\ 881{,}00\ 29''} \\ \underline{608\ 0} \\ 273\ 00 \end{array}$$

Dieses Gradmaß in Theilen des Halbmessers = 1 ausgedrückt, giebt:

$$\begin{array}{l} 34^\circ = 0{,}59341195 \\ 42' = 0{,}01221730 \\ 29'' = 0{,}00014060 \end{array}$$

$$\text{B. S.}\frac{32}{56{,}2} = 0{,}60576985$$

$$\text{Log. B.S.}\frac{32}{56{,}2} = \text{Log. } 0{,}60576985 = 0{,}7823006 - 1$$

$$65$$

$$5{,}8$$

$$0{,}36$$

$$0{,}7823077 - 1$$

$$\text{Log. } 145919{,}93 = 5{,}1640851$$

$$267$$

$$26{,}7$$

$$0{,}89$$

$$5{,}1641145$$

$$\text{Log.B.S.}\frac{32}{56{,}2} = 0{,}7823077 - 1$$

$$4{,}9464222, \text{ hierzu gehört } 88394.$$

Diesen Werth in (A.) substituirt, giebt:

$$Q = 3 \cdot 0{,}86602\,[90147{,}52 - 88394]$$

$$Q = 2{,}59806 \cdot 1753{,}52 = 4555{,}75 \text{ Kub. Elle.}$$

§. 30.

Die Oberfläche einer Kuppel, welche ein regulaires Vieleck zur Grundfläche und gleiche Kreisbogen zu Kanten hat, deren Mittelpunkt über das Centrum C des Vielecks hinausfallen, wird am einfachsten berechnet, wenn man den auf der Mitte einer Seitenlinie der Grundfläche, bis zur Spitze gezogenen Bogen FG, Fig. 39, an der Kuppel oder an der Zeichnung des Profils unmittelbar messen kann. Die Länge des Bogens FG möge $= m$; die Höhe $CF = h$; der Halbmesser für die Bogen $FE = FD$ ꝛc. $= R$; der Halbmesser des Polygons $= CE = r$; die Anzahl der Seitenlinien des letztern $= n$, und der Centriwinkel $ECB = \frac{360}{n}$ sein. R ist sodann $= \frac{h^2 + r^2}{2r}$ und S.β in nachstehender Formel $= \frac{h \,.\, S.\left(\frac{180}{n}\right)}{R}$ zu setzen.

Bezeichnet F die Oberfläche der Kuppel; so ist:

$$(A.)\; F = \tfrac{1}{2}\, nR^2\,[S.2\beta + B.2\beta] - 2\,(R - r)\,m.\,S.\left(\frac{180°}{n}\right)$$

84ste Aufgabe.

Die Grundfläche einer Kuppel sei ein regulaires 6 Eck; der Halbmesser des ihm zugehörigen Kreises, Fig. 39, $= CE = r = 8$ Ellen; die Höhe der Kuppel $= CF = h = 24$ Ellen; die Länge des Bogens $GF = m = 61$ Ellen 3 Zoll. Wie viel Quadratellen enthält die äußere Fläche F dieser Kuppel?

Auflösung.

$n = 6$

$\frac{180°}{n} = \frac{180°}{6} \quad 30°$

$r = 8$ Ellen.

$h = 24$ „

$m = 61\frac{1}{4}$ „ Es ist demnach:

$$R = \frac{h^2+r^2}{2r} = \frac{24^2+8^2}{2.8} = \frac{640}{16} = 40 \text{ Ellen.}$$

$$S.\beta = \frac{h.S.\frac{180^\circ}{n}}{R} = \frac{24.S.30^\circ}{40} = \frac{8S.30^\circ}{5} = \frac{3.0{,}5}{5} = 0{,}3$$

Log. 0,3 = 0,4771213 − 1
10.

Log. S.β = Log. S. 0,3 = 9,4771213, hierzu gehört 17° 27′ 27″ = β

69380
66,95 | 1833,00 | 27″
1339 0
494 00

Es ist demnach 2β = 34° 54′ 54″, und
B.2β = B. 34° 54′ 54″.

34° = 0,59341195
54′ = 0,01570796
54″ = 0,00026180
(B.) B.2β = 0,60938171

und Log. S.2β = Log. S. 34° 54′ 54″ = 0,7575068 − 1
1629
0,7576697 − 1, hierzu gehört 0,57236 = S.2β (C.)

Diff. 1″ = 30,17
54
12068
15085
1629,18

Vorstehende Werthe von (B.) und (C.) in die allgemeine Formel (A.) substituirt, geben;

$$F = \tfrac{1}{2} nR^2 [S.2\beta + B.2\beta] - 2(R-r)\,m.\,S.\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$$

$$F = \tfrac{1}{2}.6.40^2 [0{,}57236 + 0{,}60938] - 2(40-8).61\tfrac{1}{8}.0{,}5$$

$$F = 4800 . 1{,}18174 - 1956$$

$$F = 3716{,}352 \text{ Quad. Elle.}$$

Anmerk. Will man nur eine gekrümmte Fläche z. B. BFE in Hinsicht ihres Flächeninhaltes wissen, so ist n in der Formel (A.) hinwegzulassen. Dieselbe enthält demnach in gegenwärtiger Aufgabe 619,392 □Elle.

85ste Aufgabe.

Die Kuppel ABD, Fig. 36, habe eine Ellipse zur Grundfläche; ihre halbe große Axe CD = AC sei a = 10 Ellen; die halbe kleine Axe CE = CG = b = 8 Ellen. DB sei ein Kreisbogen, dessen Mittelpunkt in M liegt, so daß die Entfernung beider Mittelpunkte, das ist MC, = c = 4 Ellen beträgt, folglich der Halbmesser des Bogens = MD = (a + c) = r = 14 Ellen, und die Höhe der Kuppel = h = 13,385 Elle. Wie viel Kubikellen beträgt der körperliche Inhalt der Kuppel = Q?

Auflösung.

a = 10 Ellen.
b = 8 „
c = 4 „
r = 14 „
h = 13,385 Elle.

$$Q = 3{,}1416 \cdot \frac{b}{a}\left[h(r^2 - \tfrac{1}{3}h^2) - (r-a)\,r^2\,\text{B.S.}\left(\frac{h}{r}\right)\right]$$

$$Q = 3{,}1416 \cdot \frac{8}{10}\left[13{,}385\,(14^2 - \tfrac{1}{3}\cdot 13{,}385^2) - (14-10)14^2 \cdot \text{B.S.}\left(\frac{13{,}385}{14}\right)\right]$$

$$Q = 2{,}51328\left[13{,}385 \cdot 136{,}281 - 784\,\text{B.S.}\left(\frac{13{,}385}{14}\right)\right]$$

$$(\text{A.})\ Q = 2{,}51328 \cdot \left[1824{,}1212 - 784\,\text{B.S.}\left(\frac{13{,}385}{14}\right)\right]$$

$$\text{Log.}\left(\frac{13{,}385}{14}\right) = \begin{array}{r} +1 \\ 1{,}1266184 - 1 \\ \hline 1{,}1461280 \\ \hline 0{,}9804904 - 1 \\ +10 \end{array}$$

Log. S. $\left(\frac{13{,}385}{14}\right)$ = 9,9804904, hierzu gehören 72° 57′ 15″

4803
6,45 | 101,00 | 15″
64 5
36 50

Dieses Gradmaß in Theile des Halbmessers = 1 verwandelt, ist:

$$72° = 1{,}25663706$$
$$57' = 0{,}01658063$$
$$15'' = 0{,}00007272$$
$$\text{B.S.}\left(\frac{13{,}385}{14}\right) = 1{,}27329041$$

Es ist demnach

$$Q = 2{,}51328\,[1824{,}1212 - 784 \,.\, 1{,}2733]$$
$$Q = 2{,}51328\,[1824{,}1212 - 998{,}2672]$$
$$Q = 2{,}51328 \,.\, 825{,}854$$
$$Q = 2075{,}60238 \text{ Kub. Elle} = 2075 \text{ Kub. Ellen } 8327 \text{ Kub. Zoll.}$$

86ste Aufgabe.

Die Grundfläche einer Kuppel, Fig. 36, sei eine Ellipse, welche nicht allzu viel von einem Kreise abweicht. Ihre halbe große Axe CD sei = a = 8 Ellen; die halbe kleine Axe CE = b = 7 Ellen; ferner möge BD ein Kreisbogen sein, dessen Halbmesser MD = R = 12 Ellen lang ist, und sein Mittelpunkt in M liegen. Hieraus ergiebt sich die Entfernung beider Mittelpunkte = MC = (R—a) = 4 Ellen, und die Höhe CB = h = 11,31 Elle; wie viel beträgt die Oberfläche der Kuppel an Quadratellen = F?

Auflösung.

a = 8 Ellen.
b = 7 „
R = 12 „
h = 11,31 „

$$(\text{A.})\quad F = 3{,}1416\left[\frac{(8b^2+a^2)A - (a+b)(a-b)A'}{2ab}\right]$$

In diesem Ausdrucke bezeichnet:

$$A = R\left[h - (R-a)\,\text{B.S.}\left(\frac{h}{R}\right)\right]$$

$$A' = \frac{h^3}{3R} - \frac{(R-a)^2 h}{2R} - \frac{(R-a)R.}{2}\,\text{B.S.}\frac{h}{R}$$

Ausübung.

1) Bestimmung des Werthes von A.

$$A = 12\left[11.31 - (12-8)\,\text{B.S.}\left(\frac{11,31}{12}\right)\right]$$

$$\text{(B.)}\ A = 12\left[11,31 - 4\,\text{B.S.}\left(\frac{11,31}{12}\right)\right]$$

$+1$

Log. 11,31 $= 1,0534626 - 1$

Log. 12 $= 1,0791812$

$0,9742814 - 1$

$+10$

Log. S. $\left(\frac{11,31}{12}\right) = 9,9742814$, hierzu gehören 70° 28′ 32″

2570		
7,47	244,00	32″
	224 1	
	19 90	

Vorstehendes Gradmaß in Theilen des Halbmessers = 1 ausgedrückt, ist:

70° = 1,22173048

28′ = 0,00814487

32″ = 0,00015514

1,23003049

× 4

4. B. S. $\left(\frac{11,31}{12}\right) = 4,92012196$

Letzteren Werth in (B.) substituirt, giebt:

$A = 12\,[11,31 - 4,92]$

$A = 12 \times 6,39 = 76,68.$

2) Berechnung des Werthes von A′.

$$A' = \frac{h^3}{3R} - \frac{(R-a)^2 h}{2R} - \frac{(R-a)R}{2}\,\text{B.S.}\left(\frac{h}{R}\right)$$

$$A' = \frac{11,31^3}{3.12} - \frac{(12-8)^2.11,32}{2.12} - \frac{(12-8)}{2}.12.\text{B.S.}\left(\frac{11,31}{12}\right)$$

$$\text{(C.)}\ A' = 40,187 - 7,54 - 24.\text{B.S.}\left(\frac{11,31}{12}\right)$$

$$+1$$
$$\text{Log. } 11{,}31 = 1{,}0534626 - 1$$
$$\text{Log. } 12 = 1{,}0791812$$
$$0{,}9742814 - 1$$
$$+10$$
$$\text{Log. S.}\left(\frac{11{,}31}{12}\right) = 9{,}9742814,$$ hierzu gehören $70° 28' 32''$

$$\begin{array}{r|l|l} & 2570 & \\ 7{,}47 & 244{,}00 & 32'' \\ & 224\,1 & \\ \hline & 19\,90 & \end{array}$$

Dieses Gradmaß in Theile des Halbmessers $= 1$ verwandelt, ist:

$$70° = 1{,}22173048$$
$$28' = 0{,}00814487$$
$$32'' = 0{,}00015514$$
$$\text{B. S.}\left(\frac{11{,}31}{12}\right) = 1{,}23003049$$
$$\times 24$$
$$492012196$$
$$246006098$$
$$24\,\text{B.S.}\left(\frac{11{,}31}{12}\right) = 29{,}52073176.$$ Diesen Werth in (C.) gesetzt giebt:

$$A' = 40{,}187 - 7{,}54 - 29{,}52$$
$$A' = 3{,}127$$

Da nunmehr die Werthe von A und A' bekannt sind, so ist die Gleichung (A.) auszuüben. Dieselbe war:

$$F = 3{,}1416\left[\frac{(3b^2+a^2)A-(a+b)(a-b)A'}{2.ab}\right]$$
$$F = 3{,}1416\left[\frac{(3.7^2+8^2)76{,}68-(8+7)(8-7).3{,}127}{2.8.7}\right]$$
$$F = 3{,}1416\left[\frac{16179{,}48-46{,}905}{112}\right]$$
$$F = \frac{3{,}1416\times 16132{,}575}{112}$$
$$F = 452{,}518\,\square\text{E.} = 452\,\square\text{Ellen } 298\,\square\text{Zoll.}$$

Anmerk. Wenn die große und kleine Axe der elliptischen Grundfläche sehr an Größe verschieden sind; so weicht

die Ausübung vorstehenden allgemeinen Ausdruckes, nach Verhältniß obigem Unterschiedes, von der Richtigkeit ab, und man muß das wahre Resultat durch andere Annäherungsmethoden zu bestimmen suchen.

Berechnung des körperlichen Inhaltes und der Oberflächen der vorzüglichsten Arten von Gewölben.

§. 31.

Bei nachstehenden Berechnungen ist die Construction der Profile, der Grund- und Aufrisse von den verschiedenen Arten der Gewölbe als bekannt vorauszusetzen, oder in Gilly's Lehrbuche, 1sten Theil §. 125, so wie in anderen Schriften, welche diesen Gegenstand behandeln, nachzulesen, wo sodann die zur Berechnung nothwendigen Dimensionen nach dem verjüngten Maßstabe abgenommen werden können.

Es dürfte jedoch nicht überflüssig sein, einige bei Gewölben vorkommenden Kunstausdrücke zu erläutern.

Die krumme Linie, nach welcher ein Gewölbe geformt ist, heißt die Gewölblinie. Nach selbiger werden die Lehrgerüste oder Bogengestelle, die den, bei Bildung des Gewölbes aneinanderzusetzenden Steinen zur Grundlage dienen, bogenförmig abgerundet. Gemeiniglich sind die Gewölblinien, Bogen eines Kreises, einer Ellipse oder Parabel. Sollte der äußere und innere Bogen eines Gewölbes nicht gleichlaufend sein, so, daß es dadurch nicht in allen Punkten gleiche Stärke erhält; so kann zur Erleichterung der Rechnung eine mittlere Gewölblinie angenommen werden, die der innern ähnlich ist.

Die gebräuchlichsten Arten von Gewölben sind folgende:

1) Kugel-, Kessel- oder Kuppelgewölbe, deren Aushöhlung die Gestalt einer halben Kugel haben; dieselben werden gewöhnlich nur für Sallons, Spiegelgewölbe u. s. w. angewendet. Bisweilen sind sie auch elliptisch geformt, wie Fig. 40, und heißen sodann gedrückte oder erhöhete Kesselgewölbe, je nachdem Cc kleiner oder größer als aC ist.

2) Tonnengewölbe, wovon das Profil der innern Aushöhlung einen halben Kreis oder eine halbe Ellipse, und der innere Raum einen krummlinigen prismatischen Körper bildet, wie Fig. 41.

3) Zugespitztes oder gothisches Gewölbe, dessen Gewölblinie aus zwei Kreisbogen bestehet, die einen krummlinigen spitzigen Winkel bilden. Ist die Höhe kM größer als die halbe Spannung iM; so heißt es ein erhöhtes, ist selbige kleiner, ein gedrücktes gothisches Gewölbe. Sollte kM = iM sein, so erhält es den Namen Eselsrücken, Fig. 42.

4) Kloster-, Hauben- oder Kappen-Gewölbe werden diejenigen genannt, welche, wie Fig. 43, (in der obern Ansicht) auswärts gehende Kanten oder Grathe DA, DB ꝛc. haben, die auch elliptische Bogen sein können. Die gekrümmten Flächen BDA, ADE, Fig. 43, ꝛc. heißen Kappen des Gewölbes.

5) Kreuzgewölbe werden von zwei sich durchschneidenden Tonnengewölben gebildet. Sie entstehen aus zwei Bogen, die in den Ecken entspringen und in der Mitte des Gewölbes sich durchkreuzen, wie die Oberansicht ABCD, Fig. 44, zeigt. Soll ein länglicher Raum wie ABEF, Fig. 44, durch Kreuzgewölbe überdeckt werden; so sind mehrere solcher Gewölbe wie ABCD und DCEF aneinander zu setzen, und in ihrer Berührungslinie CD Gurthbogen aufzuführen.

Dieses möge hinreichend sein um nachstehende Aufgaben gehörig verstehen zu können.

Bestimmung des körperlichen Inhaltes verschiedener Kugelgewölbe.

§. 32.

87ste Aufgabe.

Der körperliche Inhalt des massiven Theiles AaDdBb = Q, Fig. 40, eines Kugelgewölbes soll berechnet werden, wenn

der innere Halbmesser der Aushöhlung $Cb = Ca = Cc = r =$ 10 Ellen, und die Stärke der Wölbung $bB = a =$ 12 Zoll ist. Wie viel Kubikwerkfuß beträgt der Inhalt des Gewölbes?

Auflösung.

$r = 10$ Ellen $= 20$ F.
$a = \frac{12}{12} = 1$ F.

$$Q = 6{,}2832 \cdot ar \cdot (a + r)$$
$$Q = 6{,}2832 \cdot 1 \cdot 20\,(1 + 20)$$
$$Q = 2638{,}944 \text{ K. W. F.} = 2639 \text{ K. W. F. } 1631 \text{ K. Z.}$$

88ste Aufgabe.

Ein gedrücktes Kesselgewölbe, Fig. 40, habe zum innern Halbmesser $Cb = r =$ 12 Ellen; seine Stärke sei $bB =$ $a =$ 18 Zoll, und dessen Höhe $Cc = h =$ 8 Ellen; die Gewölblinie acb sei eine Ellipse. Wie viel Kubikwerkfuß beträgt der massive Theil des Gewölbes an körperlichen Inhalt Q, wenn dasselbe in allen Punkten gleiche Stärke hat?

Auflösung.

$r = 24$ W. F.
$h = 16$ „ „
$a = 1\frac{1}{2}$ „ „

$$Q = 2{,}0944\,[(h + a)(r + a)^2 - hr^2]$$
$$Q = 2{,}0944\,[(16 + 1\tfrac{1}{2})(24 + 1\tfrac{1}{2})^2 - 16 \cdot 24^2]$$
$$Q = 2{,}0944\,[17{,}5 \cdot 650{,}25 - 9216]$$
$$Q = 2{,}0944\,[11379{,}375 - 9216]$$
$$Q = 2{,}0944 \cdot 2163{,}375 = 4530{,}972 \text{ K. W. F.}$$

89ste Aufgabe.

An einem erhöhten Kesselgewölbe, Fig. 40, dessen Gewölblinie acb eine Ellipse ist, sei der Halbmesser $Cb = r =$ 6 Ellen; die Höhe $Cc = h =$ 10 Ellen, und die Stärke des Gewölbes $bB = aD = a =$ 16 Zoll; wie viel Kubikwerkfuß beträgt der körperliche Inhalt des massiven Gewölbes?

Auflösung.

$r = 12$ W. F.
$h = 20$ " "
$a = 1\frac{1}{3}$ " "

Auch zu dieser Berechnung ist die vorhergehende Formel anzuwenden.

$$Q = 2{,}0944\,[(h+a)(r+a)^2 - hr^2]$$
$$Q = 2{,}0944\,[(20+1\tfrac{1}{3})(12+1\tfrac{1}{3})^2 - 20.12^2]$$
$$Q = 2{,}0944\,[21\tfrac{1}{3}.177\tfrac{7}{9} - 2880]$$
$$Q = 2{,}0944\,[3792{,}5925 - 2880]$$
$$Q = 2{,}0944\,.\,912{,}5925 = 1911{,}334 \text{ K. W. F.}$$

Anmerk. Gewöhnlich sind die Gewölbe in ihren oberen Theile schwächer als in dem unteren. Ist dieses der Fall bei einem elliptischen Gewölbe, welches keine zu große Dicke hat und wird in Fig. 40, $Ca = Cb = r$; $Cc = h$; $Bb = a$; $cD = b$, und der körperliche Inhalt des soliden Theils vom Gewölbe $= Q$ gesetzt, so erhält man mit hinreichender Genauigkeit:

$$Q = 2{,}0944\,.\,r[br + 2ah]$$

90ste Aufgabe.

Die Gewölblinie acb eines Kugelgewölbes, Fig. 40, sei ein Kreis, dessen Halbmesser $Cb = Cc = r = 8$ Ellen; ferner die untere Stärke $bB = a = 18$ Zoll, und die obere $cD = b = 12$ Zoll ist; wie viel Kubikwerkfuß beträgt der Inhalt der massiven Wölbung?

Auflösung.

$r = 16$ W. F.
$a = 1\frac{1}{2}$ W. F.
$b = 1$ W. F.

$$Q = 2{,}0944\,.\,r^2(b+2a)$$
$$Q = 2{,}0944\,.\,16^2(1+2.1\tfrac{1}{2})$$
$$Q = 2{,}0944\,.\,256\,.\,4$$
$$Q = 2144{,}66 \text{ K. W. F.}$$

Anmerk. Ist die obere und untere Stärke des Kugelgewölbes gleich, d. i. $a = b$, so wird $Q = 6{,}2832\,.\,ar^2$.

Berechnung
des massiven Theiles der Tonnengewölbe.

§. 33.

Die Gewölblinie egf, Fig. 41, kann bei dem Tonnengewölbe, ein halber Kreis, oder eine halbe Ellipse ꝛc. sein; letztere heißen sodann erhöhte oder gedrückte Tonnengewölbe, je nachdem Ng größer oder kleiner als die halbe Spannung Nf ist.

91ste Aufgabe.

Das Tonnengewölbe Fig. 41 habe zur Gewölblinie egf einen halben Kreis, dessen Halbmesser Ng = Nf = r = 12 Ellen; die obere Stärke des Gewölbes Gg = b = 12 Zoll, die untere fF = a = 18 Zoll, und seine Länge FH = l = 30 Ellen beträgt; wie viel Kubikwerkfuß enthält der massive Theil des Gewölbes = Q?

Auflösung.

r = 24 W. F.
a = $1\frac{1}{2}$ W. F.
b = 1 W. F.
l = 60 W. F.

$$Q = 1{,}5708 \cdot r(b+a)l$$
$$Q = 1{,}5708 \cdot 24(1+1\tfrac{1}{2})60$$
$$Q = 1{,}5708 \cdot 3600$$
$$Q = 5654{,}88 \text{ K. W. F.}$$

92ste Aufgabe.

Ein gothisches Tonnengewölbe Fig. 42, bei welchem die Gewölbslinie aus den beiden, zu einerlei Halbmesser gehörigen Kreisbogen ik und lk bestehet, habe zur Höhe Mk = h = 12 Fuß; die halbe Spannung des Gewölbes = Ml = Mi = m = 10 Fuß; die obere rechtwinkelig genommene Stärke des Gewölbes bei k sei = b = 10 Zoll; die untere Stärke Ll = a = 14 Zoll, und die Länge des Gewölbes = LN

$= l = 30$ Fuß; welchen körperlichen Inhalt $=$ hat der massive Theil desselben?

Auflösung.

$h = 12$ Fuß.
$m = 10$ „
$a = 1\frac{1}{6}$ „
$b = \frac{5}{6}$ „
$l = 30$ „

$$Q = (a+b)l \cdot \left(\frac{h^2+m^2}{2m}\right) \text{B.S.} \left(\frac{2hm}{h^2+m^2}\right)$$

$$Q = (1\tfrac{1}{6}+\tfrac{5}{6})30 \cdot \left(\frac{12^2+10^2}{2 \cdot 10}\right) \text{B.S.} \left(\frac{2 \cdot 12 \cdot 10}{12^2+10^2}\right)$$

$$(\text{A.})\ Q = 2 \cdot 30 \cdot 12{,}2\ \text{B.S.} \frac{60}{61}$$

$$\begin{array}{rl} & +1 \\ \text{Log.} \frac{60}{61} = & 1{,}7781513 - 1 \\ & 1{,}7853298 \\ \hline & 0{,}9928215 - 1 \\ & +10 \\ \hline \end{array}$$

$\text{Log. S.} \frac{60}{61} = 9{,}9928215$, hierzu gehören $79^\circ\ 36'\ 40''$

$$\begin{array}{r|l|l} & 8059 & \\ \hline 3{,}86 & 156{,}00 & 40'' \\ & 154\,4 & \\ \hline & 1\,60 & \end{array}$$

Nun sind für den Halbmesser $= 1$

$$\begin{array}{rl} 79^\circ = & 1{,}37881011 \\ 36' = & 0{,}01047198 \\ 40'' = & 0{,}00019393 \\ \hline \end{array}$$

$\text{B.S.} \frac{60}{61} = 1{,}38947602$. Diesen Werth in (A.) substituirt, giebt:

$$Q = 2 \cdot 30 \cdot 12{,}2 \cdot 1{,}3894$$

$$Q = 1017{,}04\ \text{K. W. F.}$$

93ste Aufgabe.

Es soll der innere Raum des zugespizten Tonnengewölbes, Fig. 42, $= Q$ berechnet werden, wenn man die Dimensionen der vorhergehenden Aufgabe zum Grunde legt.

Auflösung.

$h = 12$ W. F.
$m = 10$ W. F.
$l = 30$ W. F.

$$Q = \tfrac{1}{2}\left(\frac{h^2+m^2}{2m}\right)^2 . l . (\text{B.S.}\,\alpha - \text{S.}\,\alpha)$$

In diesem Ausdrucke ist $\text{S.}\,\tfrac{1}{2}\,\alpha = \frac{2mh}{(h^2+m^2)}$ zu setzen.

Demnach ist $\text{S.}\,\tfrac{1}{2}\,\alpha = \frac{2.10.12}{12^2+10^2} = \frac{240}{244} = \frac{60}{61}$.

In vorhergehender Aufgabe gehörten zu $\text{S.}\,\frac{60}{61} = 79^\circ\ 36'\ 40''$. Diese waren in Theilen des Halbmessers $= 1 = 1{,}38947 = \text{B.}\,\tfrac{1}{2}\,\alpha$, folglich $\text{B.}\,\alpha = 2{,}77894$.

Ferner $\text{S.}\,\alpha = \text{S.}\,159^\circ\ 13'\ 20'' = \text{S.}\,20^\circ\ 46'\ 40''$.

Log. $\text{S.}\,20^\circ\ 46'\ 40'' = 0{,}5496835 - 1$

$$\begin{array}{rl} & 2220 \\ \hline \text{Diff. } 1'' = 55{,}51 & 0{,}5499155 - 1 \text{ hierzu gehört} \\ 40 & 0{,}35474 = \text{S.}\,\alpha \\ \hline 2220{,}40 & \end{array}$$

Vorstehende Zahlenwerthe in obige Formel substituirt, geben:

$$Q = \tfrac{1}{2}\left(\frac{12^2+10^2}{2.10}\right)^2 . 30\,(2{,}77894 - 0{,}35474)$$

$$Q = \tfrac{1}{2} . 4465{,}2 . 2{,}4242 = 5412{,}2 \text{ K. W. F.}$$

1ste Anmerk. Sollte ein Tonnengewölbe an dem einen Ende oder an beiden mit einem halben Kugel- oder Kesselgewölbe geschossen sein, wie in Fig. 45, wo ACDB die obere Ansicht eines Tonnen-, und CED das halbe Kugelgewölbe vorstellt; so erhält solches den Namen Muldengewölbe.

$$R = \frac{h^2+r^2}{2r} = \frac{24^2+8^2}{2.8} = \frac{640}{16} = 40 \text{ Ellen.}$$

$$S.\beta = \frac{h.S.\frac{180°}{n}}{R} = \frac{24.S.30°}{40} = \frac{3S.30°}{5} = \frac{3.0,5}{5} = 0,3$$

Log. 0,3 = 0,4771213 − 1

10.

Log. S.β = Log. S. 0,3 = 9,4771213, hierzu gehört 17° 27′ 27″ = β

69380

66,95 | 1833,00 | 27″

1339 0

494 00

Es ist demnach 2β = 34° 54′ 54″, und

B. 2β = B. 34° 54′ 54″.

34° = 0,59341195

54′ = 0,01570796

54″ = 0,00026180

(B.) B. 2β = 0,60938171

und Log. S. 2β = Log. S. 34° 54′ 54″ = 0,7575068 − 1

1629

0,7576697 − 1, hierzu gehört 0,57236 = S. 2β (C.)

Diff. 1″ = 30,17

54

12068

15085

1629,18

Vorstehende Werthe von (B.) und (C.) in die allgemeine Formel (A.) substituirt, geben;

$$F = \tfrac{1}{2} n R^2 [S.2\beta + B.2\beta] - 2(R-r)\,m.\,S.\left(\frac{180°}{n}\right)$$

$$F = \tfrac{1}{2}.6.40^2\,[0,57236 + 0,60938] - 2(40-8).61\tfrac{1}{2}.0,5$$

$$F = 4800.1,18174 - 1956$$

$$F = 3716,352 \text{ Quad. Elle.}$$

Anmerk. Will man nur eine gekrümmte Fläche z. B. BFE in Hinsicht ihres Flächeninhaltes wissen, so ist n in der Formel (A.) hinwegzulassen. Dieselbe enthält demnach in gegenwärtiger Aufgabe 619,392 □Elle.

85ste Aufgabe.

Die Kuppel ABD, Fig. 36, habe eine Ellipse zur Grundfläche; ihre halbe große Axe CD = AC sei a = 10 Ellen; die halbe kleine Axe CE = CG = b = 8 Ellen. DB sei ein Kreisbogen, dessen Mittelpunkt in M liegt, so daß die Entfernung beider Mittelpunkte, das ist MC, = c = 4 Ellen beträgt, folglich der Halbmesser des Bogens = MD = (a + c) = r = 14 Ellen, und die Höhe der Kuppel = h = 13,385 Elle. Wie viel Kubikellen beträgt der körperliche Inhalt der Kuppel = Q?

Auflösung.

a = 10 Ellen.
b = 8 „
c = 4 „
r = 14 „
h = 13,385 Elle.

$$Q = 3{,}1416 \cdot \frac{b}{a}\left[h(r^2 - \tfrac{1}{3}h^2) - (r-a)\,r^2\,\text{B.S.}\left(\frac{h}{r}\right)\right]$$

$$Q = 3{,}1416 \cdot \frac{8}{10}\left[13{,}385\,(14^2 - \tfrac{1}{3}\cdot 13{,}385^2) - (14-10)14^2 \cdot \times \text{B.S.}\left(\frac{13{,}385}{14}\right)\right]$$

$$Q = 2{,}51328\left[13{,}385 \cdot 136{,}281 - 784\,\text{B.S.}\left(\frac{13{,}385}{14}\right)\right]$$

$$(\text{A.})\ Q = 2{,}51328 \cdot \left[1824{,}1212 - 784\,\text{B.S.}\left(\frac{13{,}385}{14}\right)\right]$$

$$\text{Log.}\left(\frac{13{,}385}{14}\right) = 1{,}1266184 - 1 + 1$$

$$1{,}1461280$$

$$0{,}9804904 - 1 + 10$$

$$\text{Log. S.}\left(\frac{13{,}385}{14}\right) = 9{,}9804904, \text{ hierzu gehören } 72^\circ\ 57'\ 15''$$

4803

6,45 | 101,00 | 15″
64 5

36 50

Dieses Gradmaß in Theile des Halbmessers = 1 verwandelt, ist:

$$72° = 1{,}25663706$$
$$57' = 0{,}01658063$$
$$15'' = 0{,}00007272$$
$$\text{B.S.}\left(\frac{13{,}385}{14}\right) = 1{,}27329041$$

Es ist demnach

$$Q = 2{,}51328\,[1824{,}1212 - 784 \,.\, 1{,}2733]$$
$$Q = 2{,}51328\,[1824{,}1212 - 998{,}2672]$$
$$Q = 2{,}51328 \,.\, 825{,}854$$
$$Q = 2075{,}60238 \text{ Kub. Elle} = 2075 \text{ Kub. Ellen } 8327 \text{ Kub. Zoll.}$$

86ste Aufgabe.

Die Grundfläche einer Kuppel, Fig. 36, sei eine Ellipse, welche nicht allzu viel von einem Kreise abweicht. Ihre halbe große Axe CD sei = a = 8 Ellen; die halbe kleine Axe CE = b = 7 Ellen; ferner möge BD ein Kreisbogen sein, dessen Halbmesser MD = R = 12 Ellen lang ist, und sein Mittelpunkt in M liegen. Hieraus ergiebt sich die Entfernung beider Mittelpunkte = MC = (R—a) = 4 Ellen, und die Höhe CB = h = 11,31 Elle; wie viel beträgt die Oberfläche der Kuppel an Quadratellen = F?

Auflösung.

a = 8 Ellen.
b = 7 „
R = 12 „
h = 11,31 „

$$(\text{A.})\quad F = 3{,}1416\left[\frac{(8b^2+a^2)A - (a+b)(a-b)A'}{2ab}\right]$$

In diesem Ausdrucke bezeichnet:

$$A = R\left[h - (R-a)\,\text{B.S.}\left(\frac{h}{R}\right)\right]$$

$$A' = \frac{h^3}{3R} - \frac{(R-a)^2 h}{2R} - \frac{(R-a)R.}{2}\,\text{B.S.}\frac{h}{R}$$

Ausübung.

1) Bestimmung des Werthes von A.

$$A = 12\left[11{,}31 - (12-8)\,\text{B S.}\left(\frac{11{,}31}{12}\right)\right]$$

$$\text{(B.)}\; A = 12\left[11{,}31 - 4\,\text{B. S.}\left(\frac{11{,}31}{12}\right)\right]$$

$$\begin{array}{rl} & +1 \\ \text{Log. } 11{,}31 = & 1{,}0534626 - 1 \\ \text{Log. } 12 = & 1{,}0791812 \\ & \overline{0{,}9742814 - 1} \\ & +10 \end{array}$$

$$\text{Log. S.}\left(\frac{11{,}31}{12}\right) = 9{,}9742814,\ \text{hierzu gehören } 70°\ 28'\ 32''$$

$$\begin{array}{r|l} 2570 & \\ \hline 7{,}47 & 244{,}00\,32'' \\ & 224\,1 \\ \hline & 19\,90 \end{array}$$

Vorstehendes Gradmaß in Theilen des Halbmessers = 1 ausgedrückt, ist:

$$\begin{array}{rl} 70° = & 1{,}22173048 \\ 28' = & 0{,}00814487 \\ 32'' = & 0{,}00015514 \\ \hline & 1{,}23003049 \\ & \times 4 \end{array}$$

$$4.\,\text{B. S.}\left(\frac{11{,}31}{12}\right) = 4{,}92012196$$

Letzteren Werth in (B.) substituirt, giebt:

$$A = 12\,[11{,}31 - 4{,}92]$$

$$A = 12 \times 6{,}39 = 76{,}68.$$

2) Berechnung des Werthes von A'.

$$A' = \frac{h^3}{3R} - \frac{(R-a)^2 h}{2R} - \frac{(R-a)R}{2}\,\text{B.S.}\left(\frac{h}{R}\right)$$

$$A' = \frac{11{,}31^3}{3.12} - \frac{(12-8)^2.11{,}32}{2.12} - \frac{(12-8)}{2}.12.\,\text{B.S.}\left(\frac{11{,}31}{12}\right)$$

$$\text{(C.)}\; A' = 40{,}187 - 7{,}54 - 24.\,\text{B.S.}\left(\frac{11{,}31}{12}\right)$$

$$+1$$
$$\text{Log. } 11{,}31 = 1{,}0534626 - 1$$
$$\text{Log. } 12 = 1{,}0791812$$
$$0{,}9742814 - 1$$
$$+10$$
$$\text{Log. S.}\left(\frac{11{,}31}{12}\right) = 9{,}9742814, \text{ hierzu gehören } 70° 28' 32''$$

$$\begin{array}{r|l} 2570 & \\ \hline 747 & 244{,}00\,32'' \\ & 224\,1 \\ \hline & 19\,90 \end{array}$$

Dieses Gradmaß in Theile des Halbmessers = 1 verwandelt, ist:

$$70° = 1{,}22173048$$
$$28' = 0{,}00814487$$
$$32'' = 0{,}00015514$$
$$\text{B. S.}\left(\frac{11{,}31}{12}\right) = 1{,}23003049$$
$$\times 24$$
$$492012196$$
$$246006098$$
$$24\,\text{B. S.}\left(\frac{11{,}31}{12}\right) = 29{,}52073176.$$

Diesen Werth in (C.) gesetzt giebt:

$$A' = 40{,}187 - 7{,}54 - 29{,}52$$
$$A' = 3{,}127$$

Da nunmehr die Werthe von A und A' bekannt sind, so ist die Gleichung (A.) auszuüben. Dieselbe war:

$$F = 3{,}1416\left[\frac{(3b^2+a^2)A-(a+b)(a-b)A'}{2.ab}\right]$$
$$F = 3{,}1416\left[\frac{(3.7^2+8^2)76{,}68-(8+7)(8-7).3{,}127}{2.8.7}\right]$$
$$F = 3{,}1416\left[\frac{16179{,}48-46{,}905}{112}\right]$$
$$F = \frac{3{,}1416 \times 16132{,}575}{112}$$
$$F = 452{,}518\,\square\text{C.} = 452\,\square\text{Ellen } 298\,\square\text{Zoll.}$$

Anmerk. Wenn die große und kleine Axe der elliptischen Grundfläche sehr an Größe verschieden sind; so weicht

die Ausübung vorstehenden allgemeinen Ausdruckes, nach Verhältniß obigem Unterschiedes, von der Richtigkeit ab, und man muß das wahre Resultat durch andere Annäherungsmethoden zu bestimmen suchen.

Berechnung des körperlichen Inhaltes und der Oberflächen der vorzüglichsten Arten von Gewölben.

§. 31.

Bei nachstehenden Berechnungen ist die Construction der Profile, der Grund- und Aufrisse von den verschiedenen Arten der Gewölbe als bekannt vorauszusetzen, oder in Gilly's Lehrbuche, 1sten Theil §. 125, so wie in anderen Schriften, welche diesen Gegenstand behandeln, nachzulesen, wo sodann die zur Berechnung nothwendigen Dimensionen nach dem verjüngten Maßstabe abgenommen werden können.

Es dürfte jedoch nicht überflüssig sein, einige bei Gewölben vorkommenden Kunstausdrücke zu erläutern.

Die krumme Linie, nach welcher ein Gewölbe geformt ist, heißt die Gewölblinie. Nach selbiger werden die Lehrgerüste oder Bogengestelle, die den, bei Bildung des Gewölbes aneinanderzusetzenden Steinen zur Grundlage dienen, bogenförmig abgerundet. Gemeiniglich sind die Gewölblinien, Bogen eines Kreises, einer Ellipse oder Parabel. Sollte der äußere und innere Bogen eines Gewölbes nicht gleichlaufend sein, so, daß es dadurch nicht in allen Punkten gleiche Stärke erhält; so kann zur Erleichterung der Rechnung eine mittlere Gewölblinie angenommen werden, die der innern ähnlich ist.

Die gebräuchlichsten Arten von Gewölben sind folgende:

1) Kugel-, Kessel- oder Kuppelgewölbe, deren Aushöhlung die Gestalt einer halben Kugel haben; dieselben werden gewöhnlich nur für Sallons, Spiegelgewölbe u. s. w. angewendet. Bisweilen sind sie auch elliptisch geformt, wie Fig. 40, und heißen sodann gedrückte oder erhöhete Kesselgewölbe, je nachdem Cc kleiner oder größer als aC ist.

2) Tonnengewölbe, wovon das Profil der innern Aushöhlung einen halben Kreis oder eine halbe Ellipse, und der innere Raum einen krummlinigen prismatischen Körper bildet, wie Fig. 41.

3) Zugespitztes oder gothisches Gewölbe, dessen Gewölblinie aus zwei Kreisbogen bestehet, die einen krummlinigen spitzigen Winkel bilden. Ist die Höhe kM größer als die halbe Spannung iM; so heißt es ein erhöhtes, ist selbige kleiner, ein gedrücktes gothisches Gewölbe. Sollte kM = iM sein, so erhält es den Namen Eselsrücken, Fig. 42.

4) Kloster-, Hauben- oder Kappen-Gewölbe werden diejenigen genannt, welche, wie Fig. 43, (in der obern Ansicht) auswärts gehende Kanten oder Grathe DA, DB ꝛc. haben, die auch elliptische Bogen sein können. Die gekrümmten Flächen BDA, ADE, Fig. 43, ꝛc. heißen Kappen des Gewölbes.

5) Kreuzgewölbe werden von zwei sich durchschneidenden Tonnengewölben gebildet. Sie entstehen aus zwei Bogen, die in den Ecken entspringen und in der Mitte des Gewölbes sich durchkreuzen, wie die Oberansicht ABCD, Fig. 44, zeigt. Soll ein länglicher Raum wie ABEF, Fig. 44, durch Kreuzgewölbe überdeckt werden; so sind mehrere solcher Gewölbe wie ABCD und DCEF aneinander zu setzen, und in ihrer Berührungslinie CD Gurthbogen aufzuführen.

Dieses möge hinreichend sein um nachstehende Aufgaben gehörig verstehen zu können.

Bestimmung des körperlichen Inhaltes verschiedener Kugelgewölbe.

§. 32.

87ste Aufgabe.

Der körperliche Inhalt des massiven Theiles AaDdBb = Q, Fig. 40, eines Kugelgewölbes soll berechnet werden, wenn

der innere Halbmesser der Aushöhlung Cb = Ca = Cc = r = 10 Ellen, und die Stärke der Wölbung bB = a = 12 Zoll ist. Wie viel Kubikwerkfuß beträgt der Inhalt des Gewölbes?

Auflösung.

r = 10 Ellen = 20 F.
a = $\frac{1}{2}$ " = 1 F.

$$Q = 6{,}2832 \,.\, ar \,.\, (a + r)$$
$$Q = 6{,}2832 \,.\, 1 \,.\, 20\,(1 + 20)$$
$$Q = 2638{,}944 \text{ K. W. F.} = 2639 \text{ K. W. F. } 1631 \text{ K. Z.}$$

88ste Aufgabe.

Ein gedrücktes Kesselgewölbe, Fig. 40, habe zum innern Halbmesser Cb = r = 12 Ellen; seine Stärke sei bB = a = 18 Zoll, und dessen Höhe Cc = h = 8 Ellen; die Gewölblinie acb sei eine Ellipse. Wie viel Kubikwerkfuß beträgt der massive Theil des Gewölbes an körperlichen Inhalt Q, wenn dasselbe in allen Punkten gleiche Stärke hat?

Auflösung.

r = 24 W. F.
h = 16 " "
a = $1\frac{1}{7}$ " "

$$Q = 2{,}0944\,[(h + a)(r + a)^2 - hr^2]$$
$$Q = 2{,}0944\,[(16 + 1\tfrac{1}{7})(24 + 1\tfrac{1}{7})^2 - 16 \,.\, 24^2]$$
$$Q = 2{,}0944\,[17{,}5 \,.\, 650{,}25 - 9216]$$
$$Q = 2{,}0944\,[11379{,}375 - 9216]$$
$$Q = 2{,}0944 \,.\, 2163{,}375 = 4530{,}972 \text{ K. W. F.}$$

89ste Aufgabe.

An einem erhöhten Kesselgewölbe, Fig. 40, dessen Gewölblinie acb eine Ellipse ist, sei der Halbmesser Cb = r = 6 Ellen; die Höhe Cc = h = 10 Ellen, und die Stärke des Gewölbes bB = oD = a = 16 Zoll; wie viel Kubikwerkfuß beträgt der körperliche Inhalt des massiven Gewölbes?

Auflösung.

$r = 12$ W. F.
$h = 20$ " "
$a = 1\frac{1}{3}$ " "

Auch zu dieser Berechnung ist die vorhergehende Formel anzuwenden.

$$Q = 2{,}0944[(h+a)(r+a)^2 - hr^2]$$
$$Q = 2{,}0944[(20+1\tfrac{1}{3})(12+1\tfrac{1}{3})^2 - 20.12^2]$$
$$Q = 2{,}0944[21\tfrac{1}{3}.177\tfrac{7}{9} - 2880]$$
$$Q = 2{,}0944[3792{,}5925 - 2880]$$
$$Q = 2{,}0944 . 912{,}5925 = 1911{,}334 \text{ K. W. F.}$$

Anmerk. Gewöhnlich sind die Gewölbe in ihren oberen Theile schwächer als in dem unteren. Ist dieses der Fall bei einem elliptischen Gewölbe, welches keine zu große Dicke hat und wird in Fig. 40, $Ca = Cb = r$; $Cc = h$; $Bb = a$; $cD = b$, und der körperliche Inhalt des soliden Theils vom Gewölbe $= Q$ gesetzt, so erhält man mit hinreichender Genauigkeit:

$$Q = 2{,}0944 . r[br + 2ah]$$

90ste Aufgabe.

Die Gewölblinie acb eines Kugelgewölbes, Fig. 40, sei ein Kreis, dessen Halbmesser $Cb = Cc = r = 8$ Ellen; ferner die untere Stärke $bB = a = 18$ Zoll, und die obere $cD = b = 12$ Zoll ist; wie viel Kubikwerkfuß beträgt der Inhalt der massiven Wölbung?

Auflösung.

$r = 16$ W. F.
$a = 1\frac{1}{2}$ W. F.
$b = 1$ W. F.

$$Q = 2{,}0944 . r^2(b+2a)$$
$$Q = 2{,}0944 . 16^2(1+2.1\tfrac{1}{2})$$
$$Q = 2{,}0944 . 256 . 4$$
$$Q = 2144{,}66 \text{ K. W. F.}$$

Anmerk. Ist die obere und untere Stärke des Kugelgewölbes gleich, d. i. $a = b$, so wird $Q = 6{,}2832 . ar^2$.

Berechnung
des massiven Theiles der Tonnengewölbe.

§. 33.

Die Gewölblinie egf, Fig. 41, kann bei dem Tonnengewölbe, ein halber Kreis, oder eine halbe Ellipse ꝛc. sein; letztere heißen sodann erhöhte oder gedrückte Tonnengewölbe, je nachdem Ng größer oder kleiner als die halbe Spannung Nf ist.

91ste Aufgabe.

Das Tonnengewölbe Fig. 41 habe zur Gewölblinie egf einen halben Kreis, dessen Halbmesser Ng = Nf = r = 12 Ellen; die obere Stärke des Gewölbes Gg = b = 12 Zoll, die untere fF = a = 18 Zoll, und seine Länge FH = l = 30 Ellen beträgt; wie viel Kubikwerkfuß enthält der massive Theil des Gewölbes = Q?

Auflösung.

r = 24 W. F.
a = $1\frac{1}{2}$ W. F.
b = 1 W. F.
l = 60 W. F.

$$Q = 1{,}5708 . r(b + a)l$$
$$Q = 1{,}5708 . 24(1 + 1\tfrac{1}{2})60$$
$$Q = 1{,}5708 . 3600$$
$$Q = 5654{,}88 \text{ K. W. F.}$$

92ste Aufgabe.

Ein gothisches Tonnengewölbe Fig. 42, bei welchem die Gewölbslinie aus den beiden, zu einerlei Halbmesser gehörigen Kreisbogen ik und lk bestehet, habe zur Höhe Mk = h = 12 Fuß; die halbe Spannung des Gewölbes = Ml = Mi = m = 10 Fuß; die obere rechtwinkelig genommene Stärke des Gewölbes bei k sei = b = 10 Zoll; die untere Stärke Ll = a = 14 Zoll, und die Länge des Gewölbes = LN

$= l = 30$ Fuß; welchen körperlichen Inhalt $=$ hat der massive Theil desselben?

Auflösung.

$h = 12$ Fuß.
$m = 10$ „
$a = 1\frac{1}{2}$ „
$b = \frac{2}{3}$ „
$l = 30$ „

$$Q = (a+b)l.\left(\frac{h^2+m^2}{2m}\right)\text{B.S.}\left(\frac{2hm}{h^2+m^2}\right)$$

$$Q = (1\tfrac{1}{2}+\tfrac{2}{3})30.\left(\frac{12^2+10^2}{2.10}\right)\text{B.S.}\left(\frac{2.12.10}{12^2+10^2}\right)$$

(A.) $Q = 2.30.12{,}2\,\text{B.S.}\frac{60}{61}$

$$\text{Log.}\frac{60}{61} = 1{,}7781513 - 1$$
$$+\ 1$$
$$1{,}7853298$$
$$0{,}9928215 - 1$$
$$+\ 10$$

Log. S. $\frac{60}{61} = 9{,}9928215$, hierzu gehören 79° 36′ 40″

$$\begin{array}{r|l} & 8059 \\ 3{,}86 & 156{,}00\,|\,40'' \\ & 154\,4 \\ \hline & 1\,60 \end{array}$$

Nun sind für den Halbmesser $= 1$

$79° = 1{,}37881011$
$36' = 0{,}01047198$
$40'' = 0{,}00019393$

B.S. $\frac{60}{61} = 1{,}38947602$. Diesen Werth in (A.) substituirt, giebt:

$$Q = 2.30.12{,}2.1{,}3894$$
$$Q = 1017{,}04\ \text{K. W. F.}$$

93ste Aufgabe.

Es soll der innere Raum des zugespitzten Tonnengewölbes, Fig. 42, $= Q$ berechnet werden, wenn man die Dimensionen der vorhergehenden Aufgabe zum Grunde legt.

Auflösung.

$h = 12$ W. F.
$m = 10$ W. F.
$l = 30$ W. F.

$$Q = \tfrac{1}{2}\left(\frac{h^2+m^2}{2m}\right)^2 . l . (\text{B.S.}\alpha - \text{S.}\alpha)$$

In diesem Ausdrucke ist $\text{S.}\frac{1}{2}\alpha = \frac{2mh}{(h^2+m^2)}$ zu setzen.

Demnach ist $\text{S.}\frac{1}{2}\alpha = \frac{2.10.12}{12^2+10^2} = \frac{240}{244} = \frac{60}{61}$.

In vorhergehender Aufgabe gehörten zu $\text{S.}\frac{60}{61} = 79°\ 36'\ 40''$. Diese waren in Theilen des Halbmessers $= 1 = 1{,}38947 = \text{B.}\frac{1}{2}\alpha$, folglich $\text{B.}\alpha = 2{,}77894$.

Ferner $\text{S.}\alpha = \text{S.}159°\ 13'\ 20'' = \text{S.}\ 20°\ 46'\ 40''$.

Log. S. 20° 46′ 40″ = 0,5496835 — 1

Diff. 1″ = 55,51 | 2220 | 0,5499155 — 1 hierzu gehört 0,35474 = S.α

40

2220,40

Vorstehende Zahlenwerthe in obige Formel substituirt, geben:

$$Q = \tfrac{1}{2}\left(\frac{12^2+10^2}{2.10}\right)^2 . 30\,(2{,}77894 - 0{,}35474)$$

$$Q = \tfrac{1}{2} . 4465{,}2 . 2{,}4242 = 5412{,}2\ \text{K. W. F.}$$

1ste Anmerk. Sollte ein Tonnengewölbe an dem einen Ende oder an beiden mit einem halben Kugel- oder Kesselgewölbe geschlossen sein, wie in Fig. 45, wo ACDB die obere Ansicht eines Tonnen-, und CED das halbe Kugelgewölbe vorstellt; so erhält solches den Namen Muldengewölbe.

Es giebt übrigens mehrere Berechnungsarten der Fässer; hiervon ist folgende als eine der vorzüglichsten gewählt worden.

106ste Aufgabe.

Der innere Raum eines Fasses, dessen Profil edba, Fig. 48, vorstellt, soll berechnet werden. Die halbe Länge oder Axe des Fasses fh, sei $= c = 27\frac{1}{2}$ Zoll; die halbe Spundtiefe ef $= a = 15\frac{1}{2}$ Zoll, und der Halbmesser des Bodens id $=$ ib $= b = 12\frac{1}{4}$ Zoll. Wie viel Kubikwerkfuß enthält der innere Raum $= Q$ desselben?

Auflösung.

$a = 15\frac{1}{2}$ Zoll.
$b = 12\frac{1}{4}$ „
$c = 27\frac{1}{2}$ „

$$Q = 6{,}2832 \cdot c\left[a^2 - \tfrac{2}{3}a(a-b) + \tfrac{1}{5}(a-b)^2\right]$$
$$Q = 6{,}2832\,27\tfrac{1}{2}\left[(15\tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{2}{3}.15\tfrac{1}{2}(15\tfrac{1}{2} - 12\tfrac{1}{4}) + \tfrac{1}{5}(15\tfrac{1}{2} - 12\tfrac{1}{4})^2\right]$$
$$Q = 172{,}788\,[240{,}25 - 33{,}583 + 2{,}112]$$
$$Q = 172{,}788 \,.\, 208{,}779$$
$$Q = 36074{,}3 \text{ Kub. Zoll} = 20 \text{ Kub. Fuß } 1514{,}3 \text{ Kub. Zoll.}$$

Noch genauer würde man den Inhalt des Fasses erhalten, wenn zur Berechnung der allgemeine Ausdruck:

$$Q = 6{,}3832 \cdot c\left[a^2 + \tfrac{1}{3}(a-b)^2 + \tfrac{4}{15}\frac{(a-b)^3 a}{c^2} - \tfrac{2}{5}a(a-b) - \tfrac{4}{15}\frac{(a-b)^4}{c^2} - \frac{4}{105}\frac{(a-b)^5 a}{c^4}\right]$$

In praktischen Fällen ist jedoch erstere Formel hinreichend. Wäre die Faßlinie kem ein paraboliſcher Bogen, so erhält man nach vorstehender Bezeichnung:

$$Q = 6{,}2832 \cdot c\left[a^2 - \tfrac{2}{3}a(a-b) + \tfrac{1}{5}(a-b)^2\right]$$

und ist die Faßlinie kem ein elliptiſcher Bogen:

$$Q = 6{,}2832 \cdot c\left[a^2 - \tfrac{2}{3}a(a-b) + \tfrac{1}{5}(a-b)^2\right]$$

Soll die Anzahl der Kannen gefunden werden, wie viel derselben das Faß in vorstehender Aufgabe enthält; so beträgt eine Dresdener Kanne 71,8 Kubikzoll. Mit dieser Anzahl

dividire man in den Werth von Q = 36074,3 Kubikzoll, so giebt der Quotient 502,4 Kannen.

§. 39.

Um die Länge des Fasses und den Durchmesser des Bodens zu erhalten, bedient man sich besonders dazu gefertigter Instrumente. Zur Messung des Bodens bestehet dasselbe, Fig. 49, aus einem prismatischen Stabe bD, welcher in b eine scharfe Kante hat; ferner ist B eine an dem Stabe bD zu verschiebende Hülse mit der Stellschraube h; an der Hülse befindet sich ein Stäbchen ac befestiget, dessen Kante a ebenfalls zugespitzt ist; beide Spitzen werden so weit von einander entfernt, daß sie in die Endpunkte des Bodendurchmessers im Lichten zu stehen kommen. Der Stab bD ist in gleiche Theile getheilt, an welchem man bemerkt, welchen Theilstrich die Seitenlinie der Hülse bei B abschneidet, um, wenn das Instrument beim Herausnehmen verrückt werden müßte, das Stäbchen wieder in erstere Richtung gebracht werden kann, um sodann den Durchmesser auf irgend einem Ellen- oder Zollmaßstabe zu messen.

Das Instrument zu Messung der Länge des Fasses besteht Fig. 50 aus einem Ellen- oder Zollmaßstabe ab. An dem einen Ende a ist ein rechtwinkliger Ansatz abi angebracht, so daß i genau unter den Anfangspunkt c des Maßstabes zu liegen kommt. Am Maßstabe ab verschiebt sich ein zweiter rechtwinkliger Ansatz mittelst einer Hülse de, die ebenfalls so beschaffen ist, daß der Endpunkt g sich unter dem Ende d befindet. Durch Anlegung dieses Instrumentes erhält man die Länge des Fasses cd inclusive der beiden Bodenstärken, wovon jede, gemeiniglich der Daubenstärke im Spundloche, gleichgesetzt werden kann. Dieselbe ist zugleich bei Messung der Spundtiefe mittelst eines in Zollen eingetheilten Stabes hg, Fig. 49, zu bemerken. Werden die beiden Bodenstärken von der Länge der Linie cd und die Daubenstärke, von der Höhe fg abgezogen; so sind die Werthe zur Berechnung für a, b, c daraus herzuleiten.

Zweiter Abschnitt.

Berechnungen, welche sich auf andere regulaire krumme Linien beziehen.

§. 40.

1) Von der Cycloide.

Die Cycloide entstehet, wenn ein Kreis AMB, Fig. 51, auf einer Linie AD so lange fortgewälzt wird, bis der Punkt A die Linie AD zum zweitenmale in D berührt, und mittelst der Bewegung des Kreises, die Cycloide ASD beschreibt.

Anmerk. Die Construction dieser Linie, nebst den dabei vorkommenden Benennungen, so wie der folgenden regulairen krummen Linien sind in meiner bei Leopold Voß in Leipzig herausgekommenen construirenden Geometrie nachzulesen.

Der Durchmesser AB des erzeugenden Kreises stehe auf der Grundlinie AD senkrecht. Wird der Kreis AMD so weit fortgewälzt, daß der Punkt M die Grundlinie in M′ berührt, so kommt der Punkt A in A′ zu liegen, und hat auf seinem Wege den Bogen der Cycloide AA′ beschrieben, auch ist der Theil der Grundlinie = AM′ = dem Bogen AM des erzeugenden Kreises. Bei weiterer Fortwälzung wird B in C zu liegen kommen, und unter dieser Bedingung, der Theil AC der Grundlinie, der halben Peripherie AMB des erzeugenden Kreises gleich sein, hierbei hat der Punkt A die halbe Cycloide AMS beschrieben. Es ist leicht begreiflich, daß bei der ganzen Umwälzung des erzeugenden Kreises AMB, der Punkt A in D zu liegen kommt, und daß sodann die Grundlinie AD der Peripherie AMBA gleich sein muß.

Soll die Lage des beschreibenden Punktes A vom erzeugenden Kreise, durch Rechnung bestimmt werden, wenn der willkührlich angenommene Punkt M, bei der Bewegung des Krei-

ses die Grundlinie in M′ berührt, so muß der Halbmesser AG = GB = r, und die Abscisse AP = x gegeben seyn. Man bezeichne die Ordinate PA′ mit y, und es ergiebt sich die Gleichung: $y = r\,V.Sv.\frac{x}{r} - \sqrt{2rx - x^2}$. Es ist aber $V.Sv.\frac{x}{r} = V.S.\left(1 - \frac{x}{r}\right)$ oder $= -V.S.\left(\frac{x}{r} - 1\right)$ je nachdem $\frac{x}{r}$ kleiner oder größer als 1 ist. Daher $y = r\,V.S.\left(1 - \frac{x}{r}\right) - \sqrt{2rx - x^2}$ für $\frac{x}{r}$ kleiner als 1, oder $y = r\,V.\left[-S.\left(\frac{x}{r} - 1\right)\right] - \sqrt{2rx - x^2}$ für $\frac{x}{r}$ größer als 1. Im letzteren Falle gehört zu $-S.\left(\frac{x}{r} - 1\right)$ ein Bogen größer als 90°, wie nachstehende Auflösung solches näher erläutern wird.

107te Aufgabe.

Der Halbmesser AG, Fig. 51, des erzeugenden Kreises sei = r = 1,7 Fuß; die Abscisse des Punktes M = AP = x = 2,6 Fuß. Wie groß ist die Entfernung PA′, wenn sich der Punkt A bis A′ bewegt hat?

Auflösung.

x = 2,6 F.
r = 1,7 F.

$$y = r\,V.\left(Sv.\frac{x}{r}\right) - \sqrt{2rx - x^2}$$

$$y = 1{,}7\,.\,V.\left(Sv.\frac{2{,}6}{1{,}7}\right) - \sqrt{2\,.\,1{,}7\,.\,2{,}6 - (2{,}6)^2}$$

(A.) $y = 1{,}7\ V.\ (Sv.\ 1{,}5294117) - \sqrt{8{,}84 - 6{,}76}$

Weil hier der $Sv.\frac{x}{r}$ größer als der Halbmesser r ist, so muß derselbe $= -S.\left(\frac{x}{r} - 1\right) = -S.\ (1{,}5294117 - 1)$

$=$ — S. (0,5294117), das ist, dem S. $=$ 0,5294117 gleich gesetzt werden, welcher wegen des Minuszeichens zu einem Bogen, größer als 90° gehört. Es ist demnach:

Log. 0,5294117 $=$ 0,7237921 — 1

8

5,7

0,7237935 — 1

+ 10

Log. S. 0,5294117 $=$ 9,7237935, hierzu gehören 58° 3′ — 57″

6026 $=$ 58° 2′ 3″

33,75 | 1909,00 | 57″

1687 5

2215 0

Zu dem negativen Cosinus gehört der Bogen 180° — 58° 2′ 3″ $=$ 121° 57′ 57″. Dieses Grademaß in Theilen des Halbmessers $=$ 1 ausgedrückt, ist:

121° $=$ 2,11184839

57′ $=$ 0,01658063

57″ $=$ 0,00027634

B. Sv. $\frac{x}{r}$ $=$ 2,12870536

Diesen Werth in (A.) substituirt, giebt:

$y = 1{,}7 \cdot 2{,}1287 - \sqrt{2{,}08}$

$y = 3{,}6187 - 1{,}4422 = 2{,}1765$ Fuß.

108te Aufgabe.

Der Halbmesser AG des erzeugenden Kreises einer Cycloide, Fig. 51, sei, wie in vorhergehender Aufgabe, $=$ r $=$ 1,7 Fuß; die Abscisse AP $=$ x $=$ 1 Fuß; wie groß ist die Entfernung PA′, das ist, die der Abscisse x zugehörige Ordinate $=$ y?

Auflösung.

r $=$ 1,7 F.

x $=$ 1

$y = r\,B.\left(Sv.\frac{x}{r}\right) - \sqrt{2rx - x^2}$, und weil hier

$\frac{x}{r} = \frac{1}{1{,}7}$ ein ächter Bruch ist, wird

$$y = r\,\text{V.S.}\left(1-\frac{x}{r}\right)-\sqrt{2rx-x^2}$$

$$y = 1{,}7\,.\,\text{V.S.}\left(1-\frac{1}{1{,}7}\right)-\sqrt{2.1{,}7.1-1^2}$$

(A.) $y = 1{,}7\,\text{V.}(\text{S.} = 0{,}4117647) - 1{,}5491$

Log. $0{,}4117647 = 0{,}6146442 - 1$

42

7,4

$0{,}6146491 - 1$

$+\ 10$

Log. S. $\left(1-\frac{x}{r}\right) = 9{,}6146491$, hierzu gehören 65° 42′ — 56″ = 65° 41′ 4″

		3850	
46,62	2641,00		56″
	2331 0		
	310 00		

Dieses Gradmaß in Theile des Halbmessers = 1 verwandelt, giebt:

65° = 1,13446401
41′ = 0,01192642
4″ = 0,00001939

V.S. $\left(1-\frac{x}{r}\right) = 1{,}14640982.$

Diesen gefundenen Werth in (A.) gesetzt, wird:

$y = 1{,}7\,.\,1{,}1464 - 1{,}5491$

$y = 1{,}94888 - 1{,}5491$

$y = 0{,}3997$ Fuß $= 0{,}4$ Fuß.

Anmerk. Wird die Abscisse AP = dem Halbmesser AG, d. i. $x = r$ angenommen; so verwandelt sich vorstehende Formel in:

$$y = r\,.\,\text{V.Sv.}\frac{r}{r}-\sqrt{2r^2-r^2}$$

$$y = r\,\text{V.Sv.}\,1 - r$$

Der Sinusversus 1 gehört aber zu den Bogen von 90°, dessen Länge $= \frac{\pi}{2} = 1{,}5708$ ist, daher wird unter dieser Bedingung:

$y = 1{,}5708\,.\,r - r = 0{,}5708\,.\,r.$

Setzt man die Abscisse AP = dem Durchmesser = dem doppelten Halbmesser, das ist x = 2r; so erhält man durch Substitution dieses Werthes:

$$y = r\,\text{B.S.v.}\frac{2r}{r} - \sqrt{2rx - x^2}$$

$$y = r\,\text{B.S.v.}\,2 - \sqrt{2rx - x^2}$$

Zum Sv.2 gehört aber der halbe Kreis, dessen Länge = π = 3,1416 beträgt. Für diesen Fall ist folglich: $y = r\pi - \sqrt{4r^2 - 4r^2} = r\pi$, das heißt: die Entfernung des Punktes A′ von der Perpendikulare AB ist unter dieser Bedingung = dem halben Umfange des erzeugenden Kreises.

§. 41.

Wenn aus dem Mittelpunkte G des erzeugenden Kreises ein Halbmesser nach dem Punkte M gelegt wird, der den Endpunkt des abzuwälzenden Bogens bezeichnet; so entsteht ein ∠MGA = α, welcher die Benennung Wälzungswinkel erhält. Sollte dieser Winkel im Gradmaße gegeben sein, so kann aus selbigem ebenfalls die Ordinate PA′ = y für den Punkt M gefunden werden, indem letzterer bei seiner Fortwälzung die Grundlinie in M′ berührt. Es ist sodann

$$y = r\,(\text{B.}\alpha - \text{S.}\alpha).$$

109te Aufgabe.

Es sei der Wälzungswinkel = ∠MGA = α = 118°, Fig. 51, und der Halbmesser AG = GM = r = 7,3 Zoll; welche Entfernung hat der beschriebene Punkt A′ von der Perpendikulare AB, oder welche Länge hat die Ordinate PA′ = y und die Abscisse AP = x?

Auflösung.

r = 7,3 Zoll.
α = 118°.

1) Die Gleichung für die Ordinate ist:

$$y = r\,[\text{B.}\alpha - \text{S.}\alpha]$$

möge 15 Ellen betragen; wie viel enthält die Oberfläche der halben Kappe KHB, so wie die Oberfläche der ganzen Kappe FKHB Quadratwerkfuß?

Auflösung.

a = 20 W. F.
b = 16 " "
c = 12 " "
s = 30 " "

$$F = c.s - \tfrac{1}{2}c\left(b + a.\frac{B.\alpha}{S.\alpha}\right)$$

Der Bogen α ist durch $S.\frac{b}{a}$ zu bestimmen, und in Theilen des Radius = 1 auszudrücken; auch ist hieraus $S.\alpha$ herzuleiten.

$$F = 12.30 - \tfrac{1}{2}.12\left(16 + 20\frac{B.\alpha}{S.\alpha}\right)$$

$$(A.)\quad F = 360 - 6\left(16 + 20\frac{B.\alpha}{S.\alpha}\right)$$

$$S.\frac{b}{a} = S.\frac{16}{20} = S.\frac{4}{5} = S.\,0{,}8$$

Log. 0,8 = 0,9030900 − 1
+ 10
Log. S. $\frac{4}{5}$ = 9,9030900, hierzu gehören 36° 53′ 48″
0136 = 36° 52′ 12″ = α
15,80 | 764,00 | 48″
632 0
132 00

36° 52′ 12″ in Theilen des Halbmessers = 1 ist:

36° = 0,62831853
52′ = 0,01512619
12″ = 0,00005818
(B.) daher B.α = 0,64350290

Ferner Log. S. α = 36° 52′ 12″ = 0,7781186 − 1
Diff. 1″ = 28,07 337
12
336,84
0,7781523 − 1 hierzu gehört (C.) 0,60000

111te Aufgabe.

Der Wälzungswinkel AGM $= \alpha$, Fig. 51, sei gegeben und $= 130°$, so wie der Halbmesser AG des erzeugenden Kreises $= r = 8$ Zoll. Welche Länge hat der Cycloidenbogen $AA' = B$, der durch die wälzende Bewegung des Punktes A beschrieben worden ist.

Auflösung.

$r = 8$ Zoll.
$\alpha = 130°$.

$$B = 4r\,(1 - \text{S}.\tfrac{1}{2}\alpha)$$
$$B = 4.8\,[1 - \text{S}.(\tfrac{1}{2}.130°)]$$
$$B = 32\,(1 - \text{S}.65°)$$
$$B = 32\,(1 - 0{,}4226183)$$
$$B = 32.0{,}5773817$$
$$B = 18{,}476 \text{ Zoll.}$$

§. 42.

Der Flächeninhalt F eines Theiles der Cycloide, zwischen der Grundlinie AQ, Fig. 51, und der Perpendikulare QA', wird durch folgende Gleichung bestimmt, wenn α den Wälzungswinkel bezeichnet

$$F = \tfrac{1}{4}r^2\,(6\,\text{B}.\alpha - 8\,\text{S}.\alpha + \text{S}.2\alpha).$$

112te Aufgabe.

Der Halbmesser AG des erzeugenden Kreises sei $= r = 9$ Zoll, der Wälzungswinkel AGM $= \alpha = 80°$. Wie viel Quadratzolle enthält die Fläche des Theils AQA' der Cycloide.

Auflösung.

$r = 9$ Zoll.
$\alpha = 80°$.

$$F = \tfrac{1}{4}r^2\,(6\,\text{B}.\alpha - 8\,\text{S}.\alpha + \text{S}.2\alpha)$$
$$F = \tfrac{1}{4}.81\,(6\,.\,\text{B}.80 - 8\,\text{S}.80° + \text{S}.(2.80°))$$
$$F = 20{,}25\,(6.1{,}39626 - 8\,\text{S}.80° + \text{S}.20°)$$
$$F = 20{,}25\,(6.1{,}39626 - 8.0{,}98481 + 0{,}34202)$$
$$F = 20{,}25\,.\,0{,}8411 = 17{,}032 \text{ Quad. Zoll.}$$

Anmerk. Der Flächeninhalt, der zwischen der Grundlinie AD und dem ganzen Bogen ASD einer Cycloide enthalten ist, beträgt so viel als die dreifache Fläche des erzeugenden Kreises AMBA $= 3r^2\pi$, folglich die Fläche der halben Cycloide $= \frac{3r^2\pi}{2}$ worinnen $\pi = 3{,}141592\ldots = 3{,}1416$ bezeichnet.

113te Aufgabe.

Der Anfangspunkt einer Cycloide liege im Scheitelpunkte S. Der Halbmesser des erzeugenden Kreises sei $= r = 20$ Zoll, die Abscisse SX, Fig. 51, $= x = 8$ Zoll. Wie viel Quadratzoll enthält der halbe Abschnitt A'SX $= F$, Fig. 51.

Auflösung.

$r = 20$ Zoll.
$x = 8$ "

$$F = r(x - \tfrac{1}{2}r)\,\text{V.Sv.}\frac{x}{r} + \tfrac{1}{2}(x+r)\sqrt{2rx - x^2}$$

$$F = 20(8-10)\,\text{V.Sv.}\frac{8}{20} + \tfrac{1}{2}(8+20)\sqrt{2\times 20\times 8 - 8^2}$$

$$F = -40\,.\,\text{V.Sv.}\,0{,}4 + 14\sqrt{256}$$

$$F = -40\,\text{V.S.}(1-0{,}4) + 14\times 16$$

$$(\text{A.})\ F = -40\,.\,\text{V.S.}\,0{,}6 + 224.$$

In diesem Ausdrucke ist zuvörderst das Gradmaß des zum S. $= 0{,}6$ gehörigen Bogens, und sodann die Länge desselben in Theilen des Halbmessers $= 1$ zu finden.

Es ist nämlich Log. $0{,}6 = 0{,}7781513 - 1$
$+ 10$
folglich Log. S. $0{,}6 = 9{,}7781513$, hierzu gehören $53°$
$1186'\ 8'' - 11'' = 53°\ 7'\ 49''$

28,07	327,00	11"
	280 7	
	46 30	

Vorstehendes Sinusmaß in Theilen des Halbmessers 1 ausgedrückt, ist:

$$\begin{aligned} 53° &= 0{,}92502450 \\ 7' &= 0\ 00203622 \\ 49'' &= 0{,}00023756 \end{aligned}$$

$$\text{B.S.}\left(1-\frac{x}{r}\right) = \text{B.Sv.}\frac{x}{r} = 0{,}92729828.$$

Diesen Werth in (A.) gesetzt, so ist:

$$\begin{aligned} F &= -40.0{,}9273+224 \\ F &= -37{,}0920+224 \\ F &= 186{,}908 \text{ □Zoll.} \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt des ganzen Abschnittes A'SA'' ist demnach 373,816 □Zoll.

Anmerk. Der Krümmungshalbmesser jedes Punktes der Cycloide ist so groß als die doppelte Sehne, welche von dem beschreibenden Punkte A nach dem Endpunkte des Wälzungspunktes M gezogen werden kann, folgl. = 2.AM.

§. 43.

2) Von der Epicycloide.

Wenn der erzeugende Kreis AMB, Fig. 52, um einen festen oder unbeweglichen Kreis AM'A''' in derselben Ebene sich herumbewegt; so wird durch den beschreibenden Punkt A eine krumme Linie AA''A''' gebildet, welche den Namen Epicycloide erhält, so wie AM'A''' der Grundkreis genennet wird. Es möge A der beschreibende und zugleich der die Grundlinie berührende Punkt sein. Bewegt sich der erzeugende Kreis durch Fortwälzung so weit, daß M nach M', und A nach A' zu liegen kommt, so wird dadurch der Bogen AM = AM' = A'M'. Auch hier heißt M'G'A' der Wälzungswinkel, und der aus dem Mittelpunkte C des Grundkreises nach den Berührungspunkten A und M' ausgehende Winkel ACM' der Grundwinkel.

Man findet die Anzahl der Wälzungen des erzeugenden Kreises, wie viel deren nöthig sind, um den Grundkreis zu

vollenden, wenn man mit der Peripherie des ersteren in die des zweiten, oder mit dem Halbmesser des ersteren, in den Halbmesser des zweiten Kreises dividirt; weil sich die Peripherien der Kreise wie ihre Halbmesser verhalten. Es möge R der Halbmesser AC des Grundkreises, und r der Halbmesser des erzeugenden Kreises GA = G'A' = G'M' sein. Ist daher der Quotient $\frac{R}{r}$ eine ganze Zahl, so kommt bei der Umwälzung der beschreibende Punkt allezeit in denselben Punkt des Grundkreises zu liegen. Ferner möge α den Wälzungswinkel A'G'M' und α' den Grundwinkel ACM' bezeichnen, beide müssen Vorstehenden zufolge ein solches Verhältniß zu einander haben, daß α' den Werth $\frac{r}{R}\alpha$ erhält.

Soll die Lage des Punktes A, wenn derselbe mittelst der Wälzung des Kreises AMB durch den Bogen AM bis A' gekommen ist, von der Mittelpunktslinie CAB bestimmt werden; so nehme man AP zur Abscisse = x, und die rechtwinklige Entfernung des Punktes A', das ist PA' zur Ordinate = y an. Nach obiger Bezeichnung ist sodann die Abscisse AP = x = (R + r) Cos. α' − r Cos. (α + α') und die Ordinate PA' = y = (R + r) Sin. α' − r Sin. (α + α').

114te Aufgabe.

Der Halbmesser des Grundkreises AC, Fig. 52, sei = R = 6 Werkfuß, der Halbmesser des erzeugenden Kreises = GA = G'M' = r = 4 Werkfuß. Der Wälzungswinkel AGM oder A'G'M' = α = 86°, so ist der Grundwinkel $\alpha' = \frac{r}{R}\alpha^\circ = \left(\frac{4}{6}.86\right)^\circ = 57^\circ\ 30'$. Es soll die Abscisse AP = x, und die Ordinate PA' = y für die Lage des Punktes A' bestimmt werden, wenn durch die Wälzung, der Punkt M nach M' gerückt ist.

3 Ellen 10 Zoll. Wie viel Kubikwerkfuß enthält der massive Theil der halben Kappe BbKkHh = Q, so wie der körperliche Inhalt des massiven Theiles des ganzen Kreuzgewölbes?

Auflösung.

$a = 12$ W. F.
$\alpha = 10\frac{1}{2}$ " "
$b = 8$ " "
$\beta = 6\frac{1}{2}$ " "

$$Q = 0{,}7854 \cdot a(ab - \alpha\beta) - \tfrac{1}{3}(a^2 b - \alpha^2 \beta)$$
$$Q = 0{,}7854 \cdot 12(12 \cdot 8 - 10\tfrac{1}{2} \cdot 6\tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{3}(12^2 \cdot 8 - (10\tfrac{1}{2})^2 \cdot 6\tfrac{1}{2})$$
$$Q = 9{,}4248 \cdot 21{,}9722 - \tfrac{1}{3}(1152 - 801{,}9675)$$
$$Q = 207{,}0835 - 116{,}6775$$
$$Q = 90{,}4060 \text{ Kub. W. F.}$$

folglich der Inhalt des ganzen soliden Gewölbes:

$$8Q = 723{,}2480 \text{ Kub. W. F.}$$

Anmerk. Wenn das Kreuzgewölbe, Fig. 47, eine gothische Gestalt hat, und deshalb der Bogen BK = KF kleiner als ein Quadrant ist, wovon der Halbmesser = R sein möge, und der Mittelpunkt des damit beschriebenen Bogens jenseit des Punktes E fällt, so erhält man $R = \frac{a^2 + h^2}{2a}$, in welchem Ausdrucke CE = a und KE = h bezeichnet.

Auch ist es in praktischer Anwendung hinreichend, die Länge des Bogens BK unmittelbar zu messen und hieraus die Fläche BKE = A zu bestimmen. Auf dieselbe Weise kann auch die innere Fläche bkE = A' berechnet werden. Ist endlich CE = c und die Stärke der Wölbung Bb = m gegeben, und beide Bogen BK und bk aus einem gemeinschaftlichen Mittelpunkte beschrieben; so ist der allgemeine Ausdruck für den Inhalt des massiven Theiles der gothischen Kappe BbKkHh, wenn selbige = Q gesetzt wird:

$$Q = [(A - A')R - \tfrac{1}{3}(h^3 - (h - m)^3)]\frac{c}{a}.$$

Sollten hingegen die Bogen BK und bk nicht aus gemeinschaftlichem Mittelpunkte beschrieben, folglich die Gewölbstärke Bb und Kk nicht gleich groß, und der Halbmesser des Bogens bk $= r$, und $Bb = m$ gegeben sein; so ist unter dieser Bedingung

$$Q = [A.R - A'(r+m)^3 - \tfrac{2}{3}(h^3 - (h-m))]\frac{c}{a}$$

Berechnung des körperlichen Inhaltes eines gewöhnlichen Fasses.

§. 38.

Ehe die Ausübung allgemeiner Formeln zur Berechnung des Inhaltes von Fässern durch Beispiele gezeigt werden kann, ist es nothwendig, die Erläuterung der bei Construction derselben vorkommenden technischen Ausdrücke vorangehen zu lassen.

Fig. 48 zeigt das Profil eines Fasses; in selbigem wird die krumme Linie kem oder lqn die **Faßlinie**, so wie die, durch die Mitte des Fasses gehende Linie hi, welche das Profil desselben in zwei gleiche Theile theilt und die Mittelpunkte der Faßboden kl und db trifft, die **Axe** des Fasses, ferner eq die **Spundtiefe**, und die über den Faßboden hinausgehenden Enden dm, bn ꝛc. die **Daubenköpfe** oder **Frösche** genennet. Der Unterschied der Spundtiefe eq und des Durchmessers kl an der Spitze der Köpfe, das ist eq — lk, heißt die **Spitzung**. Dieser Unterschied wird gewöhnlich als ein aliquoter Theil der Daubenlänge kem angenommen. Bezeichnet L diese Länge und wird selbige in n gleiche Theile getheilet; so heißt $\frac{L}{n} = m$ ein **Faßstich**, und wenn l den Durchmesser kl der Kopfenden bezeichnet, so nennet man das Verhältniß L:l, das **Fundamental-Verhältniß** des Fasses.

Dieses möge hinreichend sein, die auf vorstehenden Dimensionen beruhenden allgemeinen Ausdrücke mit genügender Uebersicht in Zahlen auszuüben.

Auflösung.

$R = 6$ F.
$r = 4$ " "
$\alpha = 86$ " "
$\alpha' = 57° 20'$.

1) Bestimmung der Abscisse AP.

$x = (R + r) \mathfrak{C}.\alpha' - r\mathfrak{C}.(\alpha + \alpha')$
$x = (6+4)\mathfrak{C}.57° 20' - 4\mathfrak{C}.(86° + 57° 20')$
$x = 10\mathfrak{C}.57° 20' - 4\mathfrak{C}.143° 20'$,

da aber der Cosinus eines stumpfen Winkels negativ ist; so wird

$x = 10\mathfrak{C}.57° 20' - 4\mathfrak{C}.143° 20'$ zu
$x = 10\mathfrak{C}.57° 20' + 4\mathfrak{C}.36° 40'$
$x = 10 . 0{,}53975 + 4 . 0{,}80212$
$x = 5{,}3975 + 3{,}2085$
$x = 8{,}606$ Fuß $= 8$ Fuß 7,2 Zoll.

2) Bestimmung der Ordinate PA'.

$y = (R + r) S.\alpha' - rS.(\alpha + \alpha')$
$y = (6+4) S.57° 20' - 4 S.(86° + 57° 20')$
$y = 10 S.57° 20' - 4 S.143° 20'$
$y = 10 S.57° 20' - 4 S.36° 40'$
$y = 10 . 0{,}84182 - 4 . 0{,}29715$
$y = 8{,}4182 - 2{,}3886$
$y = 6{,}0296$ Fuß $= 6$ Fuß 0,35 Zoll.

115te Aufgabe.

Es soll die Länge des Bogens $AA' = B$ einer Epicycloide, Fig. 52, unter der Bedingung gefunden werden, daß der Halbmesser CA des Grundkreises $= R = 2$ Ellen 4 Zoll; der Halbmesser des erzeugenden Kreises $= AG = G'M' = r =$ 1 Elle 6 Zoll, und der Wälzungswinkel $A'G'M'$, oder was gleich viel, der Bogen $AM = \alpha = 72°$ ist.

dividire man in den Werth von Q = 36074,3 Kubikzoll, so giebt der Quotient 502,4 Kannen.

§. 39.

Um die Länge des Fasses und den Durchmesser des Bodens zu erhalten, bedient man sich besonders dazu gefertigter Instrumente. Zur Messung des Bodens bestehet dasselbe, Fig. 49, aus einem prismatischen Stabe bD, welcher in b eine scharfe Kante hat; ferner ist B eine an dem Stabe bD zu verschiebende Hülse mit der Stellschraube h; an der Hülse befindet sich ein Stäbchen ac befestiget, dessen Kante a ebenfalls zugespitzt ist; beide Spitzen werden so weit von einander entfernt, daß sie in die Endpunkte des Bodendurchmessers im Lichten zu stehen kommen. Der Stab bD ist in gleiche Theile getheilt, an welchem man bemerkt, welchen Theilstrich die Seitenlinie der Hülse bei B abschneidet, um, wenn das Instrument beim Herausnehmen verrückt werden müßte, das Stäbchen wieder in erstere Richtung gebracht werden kann, um sodann den Durchmesser auf irgend einem Ellen- oder Zollmaßstabe zu messen.

Das Instrument zu Messung der Länge des Fasses besteht Fig. 50 aus einem Ellen- oder Zollmaßstabe ab. An dem einen Ende a ist ein rechtwinkliger Ansatz abi angebracht, so daß i genau unter den Anfangspunkt c des Maßstabes zu liegen kommt. Am Maßstabe ab verschiebt sich ein zweiter rechtwinkliger Ansatz mittelst einer Hülse de, die ebenfalls so beschaffen ist, daß der Endpunkt g sich unter dem Ende d befindet. Durch Anlegung dieses Instrumentes erhält man die Länge des Fasses cd inclusive der beiden Bodenstärken, wovon jede, gemeiniglich der Daubenstärke im Spundloche, gleichgesetzt werden kann. Dieselbe ist zugleich bei Messung der Spundtiefe mittelst eines in Zollen eingetheilten Stabes hg, Fig. 49, zu bemerken. Werden die beiden Bodenstärken von der Länge der Linie cd und die Daubenstärke, von der Höhe fg abgezogen; so sind die Werthe zur Berechnung für a, b, c daraus herzuleiten.

$=-$ S. (0,5294117), das ist, dem S. $=0{,}5294117$ gleich gesetzt werden, welcher wegen des Minuszeichens zu einem Bogen, größer als 90° gehört. Es ist demnach:

Log. $0{,}5294117 = 0{,}7237921 - 1$

8

$5{,}7$

$0{,}7237935 - 1$

$+10$

Log. S. $0{,}5294117 = 9{,}7237935$, hierzu gehören $58° 3' - 57''$

6026 $= 58° 2' 3''$

33,75 | 1909,00 | 57″

1687 5

2215 0

Zu dem negativen Cosinus gehört der Bogen $180° - 58° 2' 3'' = 121° 57' 57''$. Dieses Grademaß in Theilen des Halbmessers $= 1$ ausgedrückt, ist:

$121° = 2{,}11184839$

$57' = 0{,}01658063$

$57'' = 0{,}00027634$

B. Sv. $\frac{x}{r} = 2{,}12870536$

Diesen Werth in (A.) substituirt, giebt:

$y = 1{,}7 . 2{,}1287 - \sqrt{2{,}08}$

$y = 3{,}6187 - 1{,}4422 = 2{,}1765$ Fuß.

108te Aufgabe.

Der Halbmesser AG des erzeugenden Kreises einer Cycloide, Fig. 51, sei, wie in vorhergehender Aufgabe, $= r = 1{,}7$ Fuß; die Abscisse $AP = x = 1$ Fuß; wie groß ist die Entfernung PA′, das ist, die der Abscisse x zugehörige Ordinate $= y$?

Auflösung.

$r = 1{,}7$ F.

$x = 1$

$y = r \text{ B.} \left(\text{Sv.} \frac{x}{r} \right) - \sqrt{2rx - x^2}$, und weil hier

$\frac{x}{r} = \frac{1}{1{,}7}$ ein ächter Bruch ist, wird

$$y = r\,B.S.\left(1-\frac{x}{r}\right)-\sqrt{2rx-x^2}$$

$$y = 1{,}7\,.\,B.S.\left(1-\frac{1}{1{,}7}\right)-\sqrt{2.1{,}7.1-1^2}$$

(A.) $y = 1{,}7\,B.(S. = 0{,}4117647) - 1{,}5491$

Log. $0{,}4117647 = 0{,}6146442 - 1$

42

7,4

$0{,}6146491 - 1$

$+\ 10$

Log. S. $\left(1-\frac{x}{r}\right) = 9{,}6146491$, hierzu gehören 65° 42′ —

3850 56″ = 65° 41′ 4″

46,62 | 2641,00 | 56″

2331 0

310 00

Dieses Gradmaß in Theile des Halbmessers = 1 verwandelt, giebt:

65° = 1,13446401

41′ = 0,01192642

4″ = 0,00001939

$B.S.\left(1-\frac{x}{r}\right) = 1{,}14640982.$

Diesen gefundenen Werth in (A.) gesetzt, wird:

$y = 1{,}7\,.\,1{,}1464 - 1{,}5491$

$y = 1{,}94888 - 1{,}5491$

$y = 0{,}3997$ Fuß $= 0{,}4$ Fuß.

Anmerk. Wird die Abscisse AP = dem Halbmesser AG, d. i. $x = r$ angenommen; so verwandelt sich vorstehende Formel in:

$$y = r\,.\,B.Sv.\frac{r}{r}-\sqrt{2r^2-r^2}$$

$$y = r\,B.Sv.\,1-r$$

Der Sinusversus 1 gehört aber zu den Bogen von 90°, dessen Länge $= \frac{\pi}{2} = 1{,}5708$ ist, daher wird unter dieser Bedingung:

$y = 1{,}5708\,.\,r - r = 0{,}5708\,.\,r.$

Setzt man die Abscisse AP = dem Durchmesser = dem doppelten Halbmesser, das ist $x = 2r$; so erhält man durch Substitution dieses Werthes:

$$y = r\,\text{V.S.v.}\frac{2r}{r} - \sqrt{2rx - x^2}$$

$$y = r\,\text{V.S.v.}\,2 - \sqrt{2rx - x^2}$$

Zum Sv.2 gehört aber der halbe Kreis, dessen Länge $= \pi = 3{,}1416$ beträgt. Für diesen Fall ist folglich: $y = r\pi - \sqrt{4r^2 - 4r^2} = r\pi$, das heißt: die Entfernung des Punktes A′ von der Perpendikulare AB ist unter dieser Bedingung = dem halben Umfange des erzeugenden Kreises.

§. 41.

Wenn aus dem Mittelpunkte G des erzeugenden Kreises ein Halbmesser nach dem Punkte M gelegt wird, der den Endpunkt des abzuwälzenden Bogens bezeichnet; so entsteht ein $\angle MGA = \alpha$, welcher die Benennung Wälzungswinkel erhält. Sollte dieser Winkel im Gradmaße gegeben sein, so kann aus selbigem ebenfalls die Ordinate PA′ = y für den Punkt M gefunden werden, indem letzterer bei seiner Fortwälzung die Grundlinie in M′ berührt. Es ist sodann

$$y = r\,(\text{V.}\alpha - \text{S.}\alpha).$$

109te Aufgabe.

Es sei der Wälzungswinkel $= \angle MGA = \alpha = 118°$, Fig. 51, und der Halbmesser AG = GM = r = 7,3 Zoll; welche Entfernung hat der beschriebene Punkt A′ von der Perpendikulare AB, oder welche Länge hat die Ordinate PA′ = y und die Abscisse AP = x?

Auflösung.

$r = 7{,}3$ Zoll.
$\alpha = 118°$.

1) Die Gleichung für die Ordinate ist:

$$y = r\,[\text{V.}\alpha - \text{S.}\alpha]$$

$$y = r\,\text{V.S.}\left(1-\frac{x}{r}\right)-\sqrt{2rx-x^2}$$

$$y = 1{,}7\,.\,\text{V.S.}\left(1-\frac{1}{1{,}7}\right)-\sqrt{2.1{,}7.1-1^2}$$

(A.) $y = 1{,}7\,\text{V.}(\text{S.} = 0{,}4117647) - 1{,}5491$

Log. $0{,}4117647 = 0{,}6146442 - 1$

42

7,4

$0{,}6146491 - 1$

$+\,10$

Log. S. $\left(1-\frac{x}{r}\right) = 9{,}6146491$, hierzu gehören 65° 42′ —

3850 56″ = 65° 41′ 4″

46,62 | 2641,00 | 56″

2331 0

310 00

Dieses Gradmaß in Theile des Halbmessers = 1 verwandelt, giebt:

65° = 1,13446401
41′ = 0,01192642
4″ = 0,00001939

$$\text{V.S.}\left(1-\frac{x}{r}\right) = 1{,}14640982.$$

Diesen gefundenen Werth in (A.) gesetzt, wird:

$y = 1{,}7\,.\,1{,}1464 - 1{,}5491$

$y = 1{,}94888 - 1{,}5491$

$y = 0{,}3997$ Fuß $= 0{,}4$ Fuß.

Anmerk. Wird die Abscisse AP = dem Halbmesser AG, d. i. $x = r$ angenommen; so verwandelt sich vorstehende Formel in:

$$y = r\,.\,\text{V.Sv.}\frac{r}{r}-\sqrt{2r^2-r^2}$$

$$y = r\,\text{V.Sv.}\,1 - r$$

Der Sinusversus 1 gehört aber zu den Bogen von 90°, dessen Länge $= \frac{\pi}{2} = 1{,}5708$ ist, daher wird unter dieser Bedingung:

$y = 1{,}5708\,.\,r - r = 0{,}5708\,.\,r$.

111te Aufgabe.

Der Wälzungswinkel AGM $= \alpha$, Fig. 51, sei gegeben und $= 130°$, so wie der Halbmesser AG des erzeugenden Kreises $= r = 8$ Zoll. Welche Länge hat der Cycloidenbogen $AA' = B$, der durch die wälzende Bewegung des Punktes A beschrieben worden ist.

Auflösung.

$r = 8$ Zoll.
$\alpha = 130°$.

$$B = 4r\,(1 - \mathrm{S}.\tfrac{1}{2}\alpha)$$
$$B = 4.8\,[1 - \mathrm{S}.(\tfrac{1}{2}.130°)]$$
$$B = 32\,(1 - \mathrm{S}.65°)$$
$$B = 32\,(1 - 0{,}4226183)$$
$$B = 32.0{,}5773817$$
$$B = 18{,}476 \text{ Zoll.}$$

§. 42.

Der Flächeninhalt F eines Theiles der Cycloide, zwischen der Grundlinie AQ, Fig. 51, und der Perpendikulare QA', wird durch folgende Gleichung bestimmt, wenn α den Wälzungswinkel bezeichnet

$$F = \tfrac{1}{4}r^2\,(6\,\mathrm{V}.\alpha - 8\,\mathrm{S}.\alpha + \mathrm{S}.2\alpha).$$

112te Aufgabe.

Der Halbmesser AG des erzeugenden Kreises sei $= r = 9$ Zoll, der Wälzungswinkel AGM $= \alpha = 80°$. Wie viel Quadratzolle enthält die Fläche des Theils AQA' der Cycloide.

Auflösung.

$r = 9$ Zoll.
$\alpha = 80°$.

$$F = \tfrac{1}{4}r^2\,(6\,\mathrm{V}.\alpha - 8\,\mathrm{S}.\alpha + \mathrm{S}.2\alpha)$$
$$F = \tfrac{1}{4}.81\,(6.\mathrm{V}.80 - 8\,\mathrm{S}.80° + \mathrm{S}.(2.80°))$$
$$F = 20{,}25\,(6.1{,}39626 - 8\,\mathrm{S}.80° + \mathrm{S}.20°)$$
$$F = 20{,}25\,(6.1{,}39626 - 8.0{,}98481 + 0{,}34202)$$
$$F = 20{,}25.0{,}8411 = 17{,}032 \text{ Quad. Zoll.}$$

Anmerk. Der Flächeninhalt, der zwischen der Grundlinie AD und dem ganzen Bogen ASD einer Cycloide enthalten ist, beträgt so viel als die dreifache Fläche des erzeugenden Kreises AMBA $= 3r^2\pi$, folglich die Fläche der halben Cycloide $= \frac{3r^2\pi}{2}$ wozinnen $\pi = 3{,}141592\ldots = 3{,}1416$ bezeichnet.

113te Aufgabe.

Der Anfangspunkt einer Cycloide liege im Scheitelpunkte S. Der Halbmesser des erzeugenden Kreises sei $= r = 20$ Zoll, die Abscisse SX, Fig. 51, $= x = 8$ Zoll. Wie viel Quadratzoll enthält der halbe Abschnitt A'SX $= F$, Fig. 51.

Auflösung.

$r = 20$ Zoll.
$x = 8$ "

$$F = r(x - \tfrac{1}{2}r)\,\text{B.Sv.}\frac{x}{r} + \tfrac{1}{2}(x+r)\sqrt{2rx - x^2}$$

$$F = 20(8-10)\,\text{B.Sv.}\frac{8}{20} + \tfrac{1}{2}(8+20)\sqrt{2\times 20\times 8 - 8^2}$$

$$F = -40\,.\,\text{B.Sv.}\,0{,}4 + 14\sqrt{256}$$

$$F = -40\,\text{B.S.}(1-0{,}4) + 14\times 16$$

$$(\text{A.})\ F = -40\,.\,\text{B.S.}\,0{,}6 + 224.$$

In diesem Ausdrucke ist zuvörderst das Gradmaß des zum S. $= 0{,}6$ gehörigen Bogens, und sodann die Länge desselben in Theilen des Halbmessers $= 1$ zu finden.

Es ist nämlich Log. $0{,}6 = 0{,}7781513 - 1$
$+ 10$
folglich Log. S. $0{,}6 = 9{,}7781513$, hierzu gehören $53°$
1186 $8' - 11'' = 53°\ 7'\ 49''$

28,07	327,00	11"
	2807	
	4630	

Vorstehendes Gradmaß in Theilen des Halbmessers 1 ausgedrückt, ist:

$$\begin{aligned} 53^\circ &= 0{,}92502450 \\ 7' &= 0\ 00203622 \\ 49'' &= 0{,}00023756 \end{aligned}$$

$$\text{B.S.}\left(1-\frac{x}{r}\right) = \text{B.Sv.}\frac{x}{r} = 0{,}92729828.$$

Diesen Werth in (A.) gesetzt, so ist:

$$\begin{aligned} F &= -40.0{,}9273+224 \\ F &= -37{,}0920+224 \\ F &= 186{,}908 \text{ □Zoll.} \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt des ganzen Abschnittes A'SA'' ist demnach 373,816 □Zoll.

Anmerk. Der Krümmungshalbmesser jedes Punktes der Cycloide ist so groß als die doppelte Sehne, welche von dem beschreibenden Punkte A nach dem Endpunkte des Wälzungspunktes M gezogen werden kann, folgl. = 2.AM.

§. 43.

2) Von der Epicycloide.

Wenn der erzeugende Kreis AMB, Fig. 52, um einen festen oder unbeweglichen Kreis AM'A''' in derselben Ebene sich herumbewegt; so wird durch den beschreibenden Punkt A eine krumme Linie AA''A''' gebildet, welche den Namen Epicycloide erhält, so wie AM'A''' der Grundkreis genennet wird. Es möge A der beschreibende und zugleich der die Grundlinie berührende Punkt sein. Bewegt sich der erzeugende Kreis durch Fortwälzung so weit, daß M nach M', und A nach A' zu liegen kommt, so wird dadurch der Bogen AM = AM' = A'M'. Auch hier heißt M'G'A' der Wälzungswinkel, und der aus dem Mittelpunkte C des Grundkreises nach den Berührungspunkten A und M' ausgehende Winkel ACM' der Grundwinkel.

Man findet die Anzahl der Wälzungen des erzeugenden Kreises, wie viel deren nöthig sind, um den Grundkreis zu

vollenden, wenn man mit der Peripherie des ersteren in die des zweiten, oder mit dem Halbmesser des ersteren, in den Halbmesser des zweiten Kreises dividirt; weil sich die Peripherien der Kreise wie ihre Halbmesser verhalten. Es möge R der Halbmesser AC des Grundkreises, und r der Halbmesser des erzeugenden Kreises GA = G'A' = G'M' sein. Ist daher der Quotient $\frac{R}{r}$ eine ganze Zahl, so kommt bei der Umwälzung der beschreibende Punkt allezeit in denselben Punkt des Grundkreises zu liegen. Ferner möge α den Wälzungswinkel A'G'M' und α' den Grundwinkel ACM' bezeichnen, beide müssen Vorstehenden zufolge ein solches Verhältniß zu einander haben, daß α' den Werth $\frac{r}{R}\alpha$ erhält.

Soll die Lage des Punktes A, wenn derselbe mittelst der Wälzung des Kreises AMB durch den Bogen AM bis A' gekommen ist, von der Mittelpunktslinie CAB bestimmt werden; so nehme man AP zur Abscisse = x, und die rechtwinklige Entfernung des Punktes A', das ist PA' zur Ordinate = y an. Nach obiger Bezeichnung ist sodann die Abscisse AP = x = (R + r) Cos α' − r Cos. (α + α') und die Ordinate PA' = y = (R + r) S. α' − r S. (α + α').

114te Aufgabe.

Der Halbmesser des Grundkreises AC, Fig. 52, sei = R = 6 Werkfuß, der Halbmesser des erzeugenden Kreises = GA = G'M' = r = 4 Werkfuß. Der Wälzungswinkel AGM oder A'G'M' = α = 86°, so ist der Grundwinkel $\alpha' = \frac{r}{R}\alpha^\circ = \left(\frac{4}{6}.86\right)^\circ = 57^\circ\ 30'$. Es soll die Abscisse AP = x, und die Ordinate PA' = y für die Lage des Punktes A' bestimmt werden, wenn durch die Wälzung, der Punkt M nach M' gerückt ist.

Auflösung.

$R = 6$ F.
$r = 4$ " "
$\alpha = 86$ " "
$\alpha' = 57° 20'$.

1) Bestimmung der Abscisse AP.

$$x = (R + r) \mathfrak{C}.\alpha' - r\mathfrak{C}.(\alpha + \alpha')$$
$$x = (6+4)\mathfrak{C}.57° 20' - 4\mathfrak{C}.(86° + 57° 20')$$
$$x = 10\mathfrak{C}.57° 20' - 4\mathfrak{C}.143° 20',$$

da aber der Cosinus eines stumpfen Winkels negativ ist; so wird

$$x = 10\mathfrak{C}.57° 20' - 4\mathfrak{C}.143° 20' \text{ zu}$$
$$x = 10\mathfrak{C}.57° 20' + 4\mathfrak{C}.36° 40'$$
$$x = 10 . 0{,}53975 + 4 . 0{,}80212$$
$$x = 5{,}3975 + 3{,}2085$$
$$x = 8{,}606 \text{ Fuß} = 8 \text{ Fuß } 7{,}2 \text{ Zoll.}$$

2) Bestimmung der Ordinate PA'.

$$y = (R + r) S.\alpha' - rS.(\alpha + \alpha')$$
$$y = (6+4) S.57° 20' - 4 S.(86° + 57° 20')$$
$$y = 10 S.57° 20' - 4 S.143° 20'$$
$$y = 10 S.57° 20' - 4 S.36° 40'$$
$$y = 10 . 0{,}84182 - 4 . 0{,}29715$$
$$y = 8{,}4182 - 2{,}3886$$
$$y = 6{,}0296 \text{ Fuß} = 6 \text{ Fuß } 0{,}35 \text{ Zoll.}$$

115te Aufgabe.

Es soll die Länge des Bogens $AA' = B$ einer Epicycloide, Fig. 52, unter der Bedingung gefunden werden, daß der Halbmesser CA des Grundkreises $= R = 2$ Ellen 4 Zoll; der Halbmesser des erzeugenden Kreises $= AG = G'M' = r =$ 1 Elle 6 Zoll, und der Wälzungswinkel $A'G'M'$, oder was gleich viel, der Bogen $AM = \alpha = 72°$ ist.

vollenden, wenn man mit der Peripherie des ersteren in die des zweiten, oder mit dem Halbmesser des ersteren, in den Halbmesser des zweiten Kreises dividirt; weil sich die Peripherien der Kreise wie ihre Halbmesser verhalten. Es möge R der Halbmesser AC des Grundkreises, und r der Halbmesser des erzeugenden Kreises $GA = G'A' = G'M'$ sein. Ist daher der Quotient $\frac{R}{r}$ eine ganze Zahl, so kommt bei der Umwälzung der beschreibende Punkt allezeit in denselben Punkt des Grundkreises zu liegen. Ferner möge α den Wälzungswinkel $A'G'M'$ und α' den Grundwinkel ACM' bezeichnen, beide müssen Vorstehenden zufolge ein solches Verhältniß zu einander haben, daß α' den Werth $\frac{r}{R}\alpha$ erhält.

Soll die Lage des Punktes A, wenn derselbe mittelst der Wälzung des Kreises AMB durch den Bogen AM bis A' gekommen ist, von der Mittelpunktslinie CAB bestimmt werden; so nehme man AP zur Abscisse $= x$, und die rechtwinklige Entfernung des Punktes A', das ist PA' zur Ordinate $= y$ an. Nach obiger Bezeichnung ist sodann die Abscisse $AP = x = (R+r)\cos\alpha' - r\cos.(\alpha+\alpha')$ und die Ordinate $PA' = y = (R+r)\sin.\alpha' - r\sin.(\alpha+\alpha')$.

114te Aufgabe.

Der Halbmesser des Grundkreises AC, Fig. 52, sei $= R = 6$ Werkfuß, der Halbmesser des erzeugenden Kreises $= GA = G'M' = r = 4$ Werkfuß. Der Wälzungswinkel AGM oder $A'G'M' = \alpha = 86°$, so ist der Grundwinkel $\alpha' = \frac{r}{R}\alpha° = \left(\frac{4}{6}.86\right)° = 57° 30'$. Es soll die Abscisse $AP = x$, und die Ordinate $PA' = y$ für die Lage des Punktes A' bestimmt werden, wenn durch die Wälzung, der Punkt M nach M' gerückt ist.

$$\varrho = \frac{4r(R+r)}{(2r+R)} \text{ S. } \tfrac{1}{3}\alpha$$

$$\varrho = \frac{4.1\frac{1}{4}(2\frac{1}{6}+1\frac{1}{4})}{((2.1\frac{1}{4})+2\frac{1}{6})} \text{. S. } 36°$$

$$\varrho = \frac{205}{56} \text{. } 0{,}58778$$

$$\varrho = 2{,}1516 \text{ Ellen} = 2 \text{ Ellen } 3{,}63 \text{ Zoll.}$$

Anmerk. Die Länge des Krümmungshalbmessers im Scheitelpunkte A'' der Epicycloide ist:

$$\varrho = \frac{4r(R+r)}{2r+R}$$

$$\varrho = \frac{4.1\frac{1}{4}(2\frac{1}{6}+1\frac{1}{3})}{2.1\frac{1}{4}+2\frac{1}{3}}$$

$$\varrho = 5.\tfrac{4}{7}\tfrac{1}{2} \times \tfrac{3}{1}\tfrac{}{4} = 3\tfrac{3}{5}\tfrac{7}{6} \text{ Elle} = 3 \text{ Ellen } 15\tfrac{9}{7} \text{ Zoll.}$$

117te Aufgabe.

An einer Epicycloide, Fig. 52, sei der Halbmesser AC des Grundkreises = R = 4 Ellen 12 Zoll; der Halbmesser des erzeugenden Kreises AG = M'G' = r = 2 Ellen; der Wälzungswinkel A'G'M' = α = 120°. Wie viel Quadratellen beträgt die Fläche ACA' = F, die durch den Bogen AA', den Halbmesser des Grundkreises AC und den verlängerten Halbmesser A'C begrenzt ist?

Auflösung.

R = $4\frac{1}{2}$ Ellen.
r = 2 „
α = 120°

$$F = \frac{r(R+r)(R+2r)}{2R} \text{ (B. } \alpha - \text{S. } \alpha)$$

$$F = \frac{2(4\frac{1}{2}+2)(4\frac{1}{2}+2.2)}{2.4\frac{1}{2}} \text{ (B. } 120° - \text{S. } 120°)$$

$$F = \frac{2.6\frac{1}{2}.8\frac{1}{2}}{9} \text{ (B. } 120° - \text{S. } 60°)$$

$$F = 2.\frac{13}{2}.\frac{17}{2}.\frac{1}{9} \text{ (2,09439} - 0{,}86602)$$

$$F = 12{,}2777 \text{ . } 1{,}22837$$

F = 15,08 Quadratellen = 15 Quadratellen 46,08 Qd. Zoll.

Anmerk. Für die halbe Umwälzung des erzeugenden Kreises, wenn nämlich der Wälzungswinkel $\alpha = \pi = 3{,}1416$ ist, kommt der beschriebene Punkt A in den Scheitelpunkt A″ zu liegen. Die Fläche der halben Epicycloide ACA″ incluſive des dazu gehörigen Theiles des Grundkreiſes iſt demnach, wenn ſelbige mit f bezeichnet wird:

$$f = \frac{3{,}1416 \cdot r(R+r)(R+2r)}{2R}$$

$$f = 3{,}1416 \cdot 12{,}2777$$

$f = 38{,}57$ □Ellen $= 38$ □Ellen 328 □Zoll.

folgl. beträgt die ganze Fläche der Epicycloide AA″A‴C, nebſt dem Theile des Grundkreiſes ACA‴ $= 77{,}16$ □Ellen. Die Epicycloidenfläche AA″A‴BA, ohne die Fläche des Grundkreiſes ACA‴BA, wenn erſtere mit f bezeichnet wird, iſt:

$$f = 6{,}2832 \cdot \frac{r(R+r)(R+2r)}{2R} - 3{,}1416 \cdot rR$$

$$f = 6{,}2832 \cdot 12{,}2777 - 28{,}2744$$

$$f = 77{,}143 - 28{,}2744$$

$f = 48{,}868$ □Ellen.

§. 44.

3) Von der Hypocycloide.

Wenn der erzeugende Kreis AMB, Fig. 53, ſich in der concaven Krümmung eines Grundkreiſes fortwälzt, ſo daß die Ebenen beider Kreiſe zuſammenfallen und A als der beſchreibende Punkt angenommen wird; ſo beſchreibt derſelbe bei Umwälzung des Erzeugungskreiſes die krumme Linie AFA″. Nun ſei C der Mittelpunkt des Grund- und G der Mittelpunkt des erzeugenden Kreiſes, folglich Bogen AM $=$ Bogen AM′; ſodann iſt Winkel MGM′ $= \alpha$ der Wälzungswinkel, und ACM′ $= \alpha'$ der Grundwinkel, wo letzterer ein verhältnißmäßiger Theil des Wälzungswinkels, nämlich $\alpha' = \frac{r}{R}\alpha$ oder $\alpha = \frac{R}{r}\alpha'$

sein muß, wenn R den Halbmesser des Grundkreises und r den Halbmesser des erzeugenden Kreises bezeichnet.

Man nehme an, der Punkt M des erzeugenden Kreises komme bei der Wälzung in M′ zu liegen, so ist dadurch der beschreibende Punkt A bis A′ fortgerückt und hat den Bogen AA′ der Hypocycloide durchlaufen. Um die Entfernung des Punktes A′ von dem auf A gezogenen Halbmesser AC des Grundkreises zu bestimmen, werde die Linie A′P auf AC rechtwinkelig gezogen; sodann CP als die Abscisse = x, und PA′ als die ihr zugehörige Ordinate = y angenommen; ferner CA′ mit z, der Wälzungswinkel A′G′M′ mit α und der Grundwinkel ACM′ mit α′ bezeichnet. Dieser kurzen Erläuterung gemäß, wenn die beiden Halbmesser gegeben sind, ist

die Abscisse $CP = x = (R-r)\,\mathfrak{S}.\alpha' + r\,\mathfrak{S}.(\alpha-\alpha')$

die Ordinate $PA' = y = (R-r)\,S.\alpha' - r\,S.(\alpha-\alpha')$

und die Entfernung $CA' = z = \sqrt{(R-r)^2 + r^2 + 2r(R-r)\mathfrak{S}\alpha}$

Hierauf gründen sich folgende Auflösungen.

118te Aufgabe.

Bei Beschreibung einer Hypocycloide, Fig. 53, sei der Halbmesser des Grundkreises AC = R = 2 Ellen 12 Zoll; der Halbmesser des erzeugenden Kreises AG = r = 18 Zoll; Der Wälzungswinkel $A'G'M' = \alpha' = \frac{r}{R}\alpha = [(\frac{3}{4} : 2\frac{1}{2}) \cdot 130°]$ = 39°. welche Länge hat die Abscisse CP = x, und die Entfernung des Punktes A′ vom Halbmesser AC, das ist die Ordinate PA′ = y?

Auflösung.

R = $2\frac{1}{2}$ Elle.
r = $\frac{3}{4}$ „
α = 130°
α′ = 39°.

1) Berechnung der Abscisse CP.

$x = (R - r)\,S.\alpha' + r\,S.(\alpha - \alpha')$

$x = (2\frac{1}{2} - \frac{3}{4})\,S.\,39° + \frac{3}{4}\,S.\,(130° - 39°)$

$x = 1\frac{3}{4}\,S.\,39° + \frac{3}{4}\,S.\,91°$, wegen des Bogens $< 90°$.

$x = 1\frac{3}{4}\,S.\,39° = \frac{3}{4}\,S.\,1°$

$x = 1{,}36000 - 0{,}74988$

$x = 0{,}61012$ Elle $= 14{,}6$ Zoll.

2) Berechnung der Ordinate PA'.

$y = (R - r).\,S.\alpha' - r.\,S.\,(\alpha - \alpha')$

$y = (2\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\,S.\,39° - \frac{3}{4}\,S.\,(130° - 39°)$

$y = (2\frac{1}{2} - \frac{3}{4}).\,S.\,39° - \frac{3}{4}.\,S.\,91°$

$y = 1\frac{3}{4}.\,S.\,39° - \frac{3}{4}.\,S.\,89°$

$y = 1\frac{3}{4}.\,0{,}62932 - \frac{3}{4}.\,0{,}99984$

$y = 1{,}10131 - 0{,}74988$

$y = 0{,}35143$ Ellen $= 8{,}434$ Zoll.

§. 45.

Wird der Halbmesser des Grundkreises gleich dem Durchmesser des erzeugenden Kreises, das ist $R = 2r$ gesetzt, so wird auch der Wälzungswinkel α doppelt so groß als der Grundwinkel, das ist $\alpha = 2\alpha'$, und unter diesen Bedingungen erhält man:

$x = 2r\,S.\alpha'$

$y = r\,(S.\alpha' - S.\alpha') = 0$

und $z = 2r\,S.\alpha'$, folglich ist unter dieser Bedingung

$x = z$ und $y = 0$.

119te Aufgabe.

Der Halbmesser des Grundkreises sei $= R = 1$ Elle 12 Zoll, und doppelt so groß als der Halbmesser des erzeugenden Kreises, daher letzterer $= r = 18$ Zoll; der Wälzungswinkel $\alpha = 130°$; folglich der Grundwinkel $\frac{r}{R}.\,\alpha = \alpha' = 65°$; welche Länge hat die Abscisse $CP = x$?

Auflösung.

$R = 1\frac{1}{2}$ Elle.
$r = \frac{3}{4}$ "
$\alpha' = 65°$.

$$x = 2r\mathfrak{S}.\alpha'$$
$$x = 2.\tfrac{3}{4}\mathfrak{S}.65°$$
$$x = \tfrac{3}{2}.0{,}4226$$
$$x = 0{,}6339 \text{ Ellen} = 15{,}21 \text{ Zoll.}$$

Anmerk. Unter vorstehender Bedingung wird die Hypocycloide zur geraden Linie, und ihre Länge dem Durchmesser gleich, welcher in ihrem Anfangspunkte errichtet wird.

§. 46.

4) Von der Evolvente oder Abwickelungslinie.

Um einen unbeweglichen Kreis AM'M'', Fig. 54, sei ein vollkommen biegsamer Faden geschlungen, den man sich rein mathematisch, ohne Dicke denken muß. Derselbe sei in einem Punkte des Kreises z. B. in M'' befestiget, in dessen Endpunkte ein senkrechter Stift befindlich ist, welcher, wenn der Faden angespannt bleibt und der Stift nach der rechten Hand zu fortbewegt wird, die krumme Linie ANN ꝛc. beschreibt; sie erhält die Benennung Evolvente oder Abwickelungslinie, und der Umfang des unbeweglichen Kreises heißt sodann die Evolute oder Umwickelungslinie.

Der angespannte Faden, z. B. MN, tangirt den Kreis in M; dieses ist auch in jedem andern Punkte M', M'' ꝛc. der Fall. Zugleich ersieht man, daß die Tangente MN der Länge des abgewickelten Bogens AM gleich sein muß. Die Tangenten MN, M'N' ꝛc. erhalten die Benennung Halbmesser der Evolvente, auch ist erstere zugleich der Krümmungshalbmesser von N'. Werden aus dem Anfangspunkte A der Evolvente und dem Berührungspunkte M der Tangente, die Halbmesser AC und MC gezogen, so ergiebt sich der Abwickelungswinkel ACM.

Bezeichnet man den Halbmesser der Evolute CA mit r und den Krümmungshalbmesser mit R, ferner den Abstand dieses Punktes vom Mittelpunkte des unbeweglichen Kreises, das ist CN mit z; so ist der Abstand des Punktes N von C:

$$z = \sqrt{r^2+R^2},$$

und der Krümmungshalbmesser, wenn AC = r, CN = z gegeben ist:

$$R = \sqrt{z^2-r^2}$$

Auch erhält man, wenn der Abwickelungswinkel ACM = α gesetzt wird:

$$R = r\mathfrak{B}.\alpha, \text{ so wie}$$

$$z = r\sqrt{1+(\mathfrak{B}.\alpha)^2} \text{ und}$$

$$\mathfrak{B}.\alpha = \sqrt{\frac{z^2-r^2}{r^2}}$$

Zu Bestimmung jedes beliebigen Punktes der Evolvente, Fig. 55, sei CP = x die Abscisse des Punktes N und PN = y die ihr zugehörige Ordinate; sodann ist, wenn man den Abwickelungswinkel ACM = α kennet:

(A.) die Abscisse CP = x = r [$\mathfrak{B}.\alpha\,\mathfrak{S}.\alpha + \mathfrak{S}.\alpha$]

(B.) die Ordinate = y = r [$\mathfrak{S}.\alpha - \mathfrak{B}.\alpha\,\mathfrak{S}.\alpha$]

und die Länge des Bogens der

Evolvente $AN = b = \frac{R^2}{2r} = \frac{1}{2}r\,(\mathfrak{B}.\alpha)^2$

120ste Aufgabe.

Der Halbmesser der Evolute CA = CM, Fig. 55, sei = r = 1″ Decimalmaß, es soll der Punkt N der Evolvente mittelst seiner Abscisse CP = x und seiner Ordinate PN = y, wenn der Abwickelungswinkel ACM = α = 68°; 90°; 140°; 180°; 230°; 270°; 260° und 400° ist, bestimmt werden.

Auflösung.

r = 1′.

1) Für den Abwickelungswinkel $\alpha = 68°$.

Nach (A.) $x = r\,(\mathfrak{B}.\alpha\,\mathfrak{S}.\alpha + \mathfrak{S}.\alpha)$

$x = 1\,(\mathfrak{B}.68°\,\mathfrak{S}.68° + \mathfrak{S}.68°)$

$x = 1\,(1{,}1868 \,.\, 0{,}9272 + 0{,}3746)$

$x = 1{,}1004 + 0{,}3476$

$x = 1{,}448' = 1'4{,}48''.$

Nach (B.) $y = r\,(\mathfrak{S}.\alpha - \mathfrak{B}.\alpha\,\mathfrak{S}.\alpha)$

$y = 1\,(\mathfrak{S}.68° - \mathfrak{B}.68°\,\mathfrak{S}.68°)$

$y = 1\,(0{,}9272 - 1{,}1868 \,.\, 03746$

$y = 0{,}4826' = 4{,}826''.$

2) Für den Abwickelungswinkel $\alpha = 90°$.

Nach (A.) $x = r\,(\mathfrak{B}.\alpha\,\mathfrak{S}.\alpha + \mathfrak{S}.\alpha)$

$x = 1\,(1{,}5708 \times 1 + \mathfrak{S}.90°)$

$x = 1{,}5708' \,.\, 1 + 0$

$x = 1{,}5708' = 1'5{,}708''.$

Nach (B.) $y = 1\,(\mathfrak{S}.90° - \mathfrak{B}.90°\,\mathfrak{S}.90°)$

$y = 1\,(1 - 0) = 1'.$

3) Für den Abwickelungswinkel $\alpha = 140°$

Nach (A.) $x = 1\,(\mathfrak{B}.140°\,\mathfrak{S}.140° + \mathfrak{S}.140°)$

$x = 1\,(\mathfrak{B}.140°\,\mathfrak{S}.40° - \mathfrak{S}.40°)$

$x = 1\,(2{,}4434 \,.\, 0{,}6427 - 0{,}7660)$

$x = 0{,}8046' = 8{,}046''.$

Nach (B.) $y = 1\,(\mathfrak{S}.140° - \mathfrak{B}.140°\,\mathfrak{S}.140°)$

$y = 1\,(\mathfrak{S}.40° + \mathfrak{B}.140°\,\mathfrak{S}.40°)$

$y = 1\,(0{,}6427 + 2{,}4434 \,.\, 0{,}766)$

$y = 2{,}5143' = 2'5{,}143''.$

4) Für den Abwickelungswinkel $\alpha = 180°$.

Nach (A.) $x = 1\,(\mathfrak{B}.180°\,\mathfrak{S}.180° + \mathfrak{S}.180°)$

$x = 1\,(\mathfrak{B}.180° \,.\, 0 - 1)$

$x = -1$

Anmerk. Das Minuszeichen deutet an, daß die Abscisse = dem Halbmesser = CB., in der entgegengesetzten Lage von CA, ist.

Nach (B.) $y = 1\ (S.180° - B.180°\,S.180°)$

$y = 1\ (0 + B.180.1)$

$y = 1.3{,}1416.1$

$y = 3{,}1416' = 3'1{,}416''$

5) Für den Abwickelungswinkel $\alpha = 230°$.

Nach (A.) $x = 1\ (B.230°\,S.230° + S.230°)$

$x = 1\ (B.230°.[-(S.230-180)] - S.(230-180)$

$x = 1\ (B.230.(-S.50) - S.50)$

$x = -4{,}014425.0{,}766 - 0{,}64278$

$x = -3{,}7177' = -3'7{,}177''$

Nach (B.) $y = 1\ (S.230° - B.230°.S.220°)$

$y = 1\ (-S.50° - B\,230°.(-S.50°))$

$y = 1\ (-0{,}7660 + 4{,}01425.0{,}64278$

$y = 1{,}8143' = 1'8{,}143''$

6) Für den Abwickelungswinkel $\alpha = 270°$.

Nach (A.) $x = 1\ (B.270°\,S.270° + S.270°)$

$x = 1\ (B.270°.-1 + 0$

$x = -4{,}7124' = -4'7{,}124''.$

Nach (B.) $y = 1\ (S.270° - B.270°.S.270°$

$y = 1\ (-1 - B.270°.0)$

$y = -1'.$

Anmerk. Die Ordinate bekommt nämlich gegen die ersteren, eine entgegengesetzte Lage nach der Linken zu.

7) Für den Abwickelungswinkel $\alpha = 300°$.

Nach (A.) $x = 1.(B.300°.S.300° + S.300°)$

$x = 1.[B.300°.(-S.(360°-300°)) + S(360°-300°)]$

$x = 1.[B.300°.(-S.60°) + S.60°]$

$x = 1.[5{,}2359.-0{,}5 + 0{,}8660]$

$x = -2{,}6179 + 0{,}8660$

$x = -1{,}7519' = -1'7{,}519''$

Nach (B.) $y = 1.[S.300° - B.300°.S.300°]$

$y = 1.[-S.60° + B.300°.S.60°]$

$y = -0{,}5 - 5{,}2359.0{,}8660$

$y = -0{,}5 - 4{,}5343$

$y = -5{,}0343' = -5'0{,}343''$

8) Für den Abwickelungswinkel $\alpha = 360°$.

Nach (A.) $x = 1\ (B.360°.S.360° + C.360°)$
$x = 1\ (B.360°.0 + 1)$
$x = + 1.$

Nach (B.) $y = 1\ (S.360° - B.360° C.360°)$
$y = 1\ (0 - B.360°.1)$
$y = - 6{,}2832' = - 6'2{,}832''.$

9) Für den Abwickelungswinkel $\alpha = 400°$

Nach (A.) $x = 1\ (B.400°.S.400° + C.400°)$
$x = 1\ (B.400°.S.40° + C.40°)$
$x = 1\ (6{,}9813.0{,}6427 + 0{,}7660$
$x = 5{,}2528' = 5'2{,}528''.$

Nach (B.) $y = 1\ (S.400° - B.400° C.400°)$
$y = 1\ (S.40° - B.400°.C.40°)$
$y = 1\ (0{,}6427 - 6{,}9813.0{,}766)$
$y = - 4{,}705' = - 4'7{,}05''.$

Anmerk. Man ersieht aus diesen Beispielen, daß bei den trigonometrischen Linien auf die positive und negative Lage Rücksicht zu nehmen ist, wozu die Tafel in meiner bei Leopold Voß zu Leipzig herausgekommene Trigonometrie, Seite 6, für Anfänger benutzt werden kann.

121ste Aufgabe.

Es soll die Länge des Bogens AN einer Evolvente, Fig. 55, $= b$ gefunden werden, wenn der Halbmesser der Evolute $CA = CM = x = 18$ Zoll, und der Abwickelungswinkel $ACM = \alpha$, das eine Mal $= 80°$ und das andere Mal $= 500°$ gegeben ist.

Auflösung.

$x = \frac{3}{4}$ Elle.
$\alpha = 80°$.

Hier ist $b = \frac{1}{2} x.(B.\alpha)^2$.

1) Für den Abwickelungswinkel $\alpha = 80°$.

$$b = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} (\text{B.}\, 80°)^2$$
$$b = \tfrac{3}{8} \cdot (1{,}39626)^2$$
$$b = \tfrac{3}{8} \cdot 1{,}94953$$
$$b = 0{,}73107 \text{ Ellen} = 17{,}545 \text{ Zoll.}$$

2) Für den Abwickelungswinkel $\alpha = 500°$.

$r = \frac{3}{4}$ Ellen.
$\alpha = 500°$.

$$b = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} (\text{B.}\, 500°)^2$$
$$b = \tfrac{3}{8} \cdot (\text{B.}\, (360° + 140°)^2$$
$$b = \tfrac{3}{8} \cdot (6{,}28318 + 2{,}44346)^2$$
$$b = \tfrac{3}{8} \cdot 8{,}72664^2$$
$$b = 28{,}557 \text{ Ellen} = 28 \text{ Ellen } 13{,}368 \text{ Zoll.}$$

122ste Aufgabe.

Wie groß ist der Flächeninhalt von ACNA, Fig. 55, welchender Halbmesser AC der Evolute, der Bogen AN der Evolvente, und die Verbindungslinie des Endpunktes N vom Bogen und des Mittelpunktes C einschließt, wenn der Halbmesser CA $= r = 8$ Zoll, und das eine Mal der Abwickelungswinkel ACM $= \alpha = 72°$, und das andere Mal $400°$ ist?

Auflösung.

$r = 8$ Zoll.
$\alpha = 72°$.

1) Für den Abwickelungswinkel $\alpha = 72°$,

$$F = \tfrac{1}{6} \cdot r^2 (\text{B}\alpha)^3$$
$$F = \tfrac{1}{6} \cdot 64 (\text{B.}\, 72°)^3$$
$$F = \tfrac{32}{3} \cdot 1{,}25663^3$$
$$F = \tfrac{32}{3} \cdot 1{,}98437$$
$$F = 21{,}166 \square\text{Zoll.}$$

2) Für den Abwickelungswinkel $\alpha = 400°$.

$r = 8$ Zoll.
$\alpha = 400°$.

$$F = \frac{4}{6} \cdot 64\,(B.\,400^{\circ})^3$$
$$F = \frac{32}{3} \cdot B.\,(4^{\circ} \cdot 100)^3$$
$$F = \frac{32}{3} \cdot 6{,}98131^3$$
$$F = 3629{,}44 \;\square\text{Zoll.}$$

§. 47.

5) Von der logarithmischen Linie.

Wenn in einer geraden Linie AP, Fig. 56, der Punkt A zum Anfangspunkte der Abscissen angenommen wird, und die Abscissen AB, AC, AD ꝛc. in einer arithmetischen Reihe fortschreiten, indem die ihnen zugehörigen Ordinaten Aa, Bb, Cc ꝛc. in einer geometrischen Reihe wachsen; so wird die krumme Linie NM, welche durch die Endpunkte a, b, c, d gehet, eine logistische oder logarithmische Linie genennet; weil sich unter dieser Bedingung die Abscissen wie die Logarithmen der ihnen zugehörigen Ordinaten verhalten. Man bedienet sich zur Berechnung der logarithmischen Linie der natürlichen Logarithmen, deren Grundzahl $h = 2{,}7182818\ldots$ ist.

Es möge die erste Abscisse $AB = b$; die im Anfangspunkte A errichtete Ordinate $Aa = a$, so wie die folgende $Bb = c$, und x eine andere beliebige Abscisse sein. Die ihr zugehörige Ordinate ist sodann

$$y = a\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{x}{b}}$$

Diese Gleichung in eine logarithmische verwandelt, wird zu:

$$(A.)\ \text{Log. } y = \text{Log. } a + \frac{x}{b}\,(\text{Log. } c - \text{Log. } a)$$

Aus der gegebenen Ordinate kann die Abscisse durch folgende Gleichung gefunden werden:

$$(B.)\ x = b\,L.\frac{y}{a}$$ und wenn $a = b = 1$ gesetzt wird, ist

$$(C.)\ x = L.\,y.$$

123ste Aufgabe.

Welche Länge hat Fig. 56 die Ordinate $Dd = y$, wenn die Abscisse $AB = b = 6$ Zoll; die im Anfangspunkte A

errichtete Ordinate $Aa = a = 8$ Zoll, die darauf folgende oder zweite $Bb = c = 11$ Zoll, und die der zu findenden Ordinate Dd zukommende Abscisse $AD = x = 20$ Zoll angenommen wird.

Auflösung.

$a = 8$ Zoll.
$b = 6$ "
$c = 11$ "
$x = 20$ "

Nach (A.) $\text{Log. } y = \text{Log. } a + \frac{x}{b} (\text{Log. } c - \text{Log. } a)$

$\text{Log. } y = \text{Log. } 8 + \frac{20}{6} (\text{Log. } 11 - \text{Log. } 8)$

$\text{Log. } y = 0{,}9030900 + \frac{10}{3} (1{,}0413927 - 0{,}9030900)$

$\text{Log. } y = 0{,}9030900 + \frac{10}{3} (0{,}1383027)$

$\text{Log. } y = 0{,}9030900 + 0{,}4610090$

$\text{Log. } y = 1{,}3640990$

$y = 23{,}125$ Zoll.

124ste Aufgabe.

Zu der Ordinate einer logarithmischen Linie $Dd = y = 5$ Ellen 16 Zoll, Fig. 56, soll die ihr zugehörige Abscisse $AD = x$ gefunden werden, wenn die Entfernung der ersten beiden Abscissen $AB = b = 2$ Zoll, und die Länge der ersten Ordinate $Aa = a = 5$ Zoll gegeben ist.

Auflösung.

$a = \frac{5}{24}$ Elle.
$b = \frac{2}{12}$ "
$y = 5\frac{4}{4}$ "

Nach (B.) ist $x = b \text{L.} \left(\frac{y}{a}\right)$

$x = \frac{2}{12} \text{L.} \left(\frac{5\frac{4}{4}}{\frac{5}{24}}\right)$

$x = \frac{2}{12} \text{L.} \left(\frac{136}{5}\right)$

$\text{Log. } 136 = 2{,}1335389$
$\text{Log. } 5 = 0{,}6989700$

$\text{Log.} \left(\frac{136}{5}\right) = 1{,}4345689$ und

1,4345689
Modul = 2,302585
28691378
4303706 7
28691 2
7172 5
1147 2
71 5

$$\text{L.}\left(\frac{136}{5}\right) = 3{,}3032167$$

$$\tfrac{1}{12}\,\text{L.}\left(\frac{136}{5}\right) = 0{,}2752, \text{ folglich}$$

$$x = 0{,}2752 \text{ Elle} = 6{,}605 \text{ Zoll.}$$

125ste Aufgabe.

Welche Länge hat der Krümmungshalbmesser = R des Punktes d der logarithmischen Linie Fig. 56, wenn AB = b = 8 Zoll; Aa = a = 3 Zoll; Bb = c = 5 Zoll, und die Ordinate des Punktes d das ist Dd = y = 20 Zoll beträgt?

Auflösung.

a = 3 Zoll.
b = 8 „
c = 5 „
y = 20 „

$$R = -\frac{\sqrt{(b^2+\left(\text{L.}\frac{c}{a}\right)^2 y^2)^3}}{\left(\text{L.}\frac{c}{a}\right)^2 by}$$

$$R = -\frac{\sqrt{(64+(\text{L.}\frac{5}{3})^2\,20^2)^3}}{(\text{L.}\frac{5}{3})^2 . 8 . 20}$$

Ausübung.

Log. 5 = 0,6989700
Log. 3 = 0,4771213
Log. $\frac{5}{3}$ = 0,2218487

- ferner Log. $(\frac{1}{3}) = 0{,}2218487$
Modul $= 2{,}302585$

$0{,}4436974$
$665546\,|\,1$
$4436\,|\,8$
$1109\,|\,0$
$176\,|\,8$
$11\,|\,0$

L. $(\frac{1}{3}) = 0{,}5108253$
$0{,}51082$

$2{,}55410$
$5108\,|\,2$
$408\,|\,0$
$10\,|\,2$

$\left(\text{L.}\frac{c}{a}\right)^2 = \text{L.}\,(\frac{1}{3})^2 = 0{,}260936$

$y^2 = 400$

$\left(\text{L.}\frac{c}{a}\right)^2 y^2 = \text{L.}(\frac{1}{3})^2 . 20^2 = 104{,}3744$

$+ b^2 = + 64$

$64 + \text{L.}\,(\frac{1}{3})^2 . 20^2 = 168{,}3744$

Ferner $(\text{L.}\,\frac{1}{3})^2 . 8 . 20 = 0{,}2609 . 8 . 20 = 41{,}744.$

Dieſe Werthe in (A.) ſubſtituirt, geben:

$$R = \frac{\sqrt{(168{,}3744)^3}}{41{,}744}$$

Log. $168{,}3744^3 = 2{,}2262647$
103
$10{,}3$
$2{,}2262760$
3
$6{,}6788280$
$: 2)\ 3{,}3394140$
Log. $41{,}744 = 1{,}6205941$
$1{,}7188199 =$ der Zahl 52,338 Zoll.
$=$ 2 Ellen 4,33 Zoll.

123ste Aufgabe.

Wie viel beträgt der Flächeninhalt AaMP = F, Fig. 56, zwischen der logarithmischen Linie aM, der Asymptote AP und den beiden Ordinaten Aa und PM, wenn Aa = a = 1 Zoll; AB = b = 2 Zoll; Bb = c = 3 Zoll und MP = y = 8 Zoll ist?

Auflösung.

a = 1 Zoll.
b = 2 „
c = 3 „
y = 8 „

$$F = \frac{b(y-a)}{L.c - L.a}$$

$$F = \frac{2(8-1)}{L.3 - L.1}$$

$$F = \frac{14}{L.3 - 0}$$

Log. 3 = 0,4771213
Modul = 2,302585

0,9542426
14313639
954244
238555
38166
2305

L. 3 = 1,0986123

Log. 14 = 1,1461280
Log. (L. 3) = 0,0408447

Log. $F = \text{Log.}\frac{14}{L.3} = 1{,}1052833$, hierzu gehört 12,743 □Z.

§. 48.

6) Von den Spirallinien.

Man denke sich einen festen Punkt C, Fig. 57, um den sich eine Linie herumbewegt, bei dieser Bewegung aber nach einem gewissen Gesetze, in Hinsicht ihrer Länge, gleichförmig zu- oder abnimmt.

Unter dieser Bedingung wird ihr Endpunkt eine krumme Linie beschreiben, die, wenn die erzeugende Linie wächst, sich immer mehr vom Mittelpunkte entfernt, und wenn selbige an Größe abnimmt, sich in den angenommenen Verhältnisse dem Mittelpunkte immer mehr nähert. Die dadurch beschriebene Linie wird eine Spirallinie genennet.

Es giebt verschiedene Arten von Spirallinien, je nachdem, statt der geraden, eine andere regulaire krumme Linie bei ihrer Erzeugung zum Grunde gelegt wird. Nimmt man daher die gerade Linie CC′ als Axe und unter einer festen Richtung, entweder eine gerade Linie oder den Bogen einer Parabel, einer Hyperbel ꝛc., zur Erzeugung der Spirallinie an, so entstehet im ersteren Falle eine lineare, im zweiten eine parabolische, im dritten, eine hyperbolische Spirallinie.

Jede dieser Spirallinien, von einer und derselben Linie erzeugt, kann aber in Hinsicht der Gestalt verschieden ausfallen, wenn man derselben eine andere Lage gegen die Axe giebt. Bei den Spirallinien kommen folgende Benennungen vor:

C heißt der Mittelpunkt oder Pol der Spirale,
A′MM′A der Grundkreis,
CC′ die Axe der Spirale,
ACM der Polarwinkel des Punktes N,
CN der Polarabstand dieses Punktes.

Der fortlaufende Bogen einer Spirallinie, von der Axe CC an bis wieder zu derselben, heißt eine Windung.

a) Die lineare oder archimedische Spirallinie.

§. 49.

Die Axe CC′, Fig. 58, sei gegeben, und eine gerade Linie KK′ schneide selbige unter einem beliebigen Winkel C′AK′ = KAC. Es möge CB eine beliebige, jedoch zur Berechnung der Spirale beständige Linie = a, so wie die in dem Endpunkte B′ errichtete und durch den Winkel C′AK′ bestimmte Perpendikulare BB′ = b sein.

Durch A beschreibe man, mit dem Halbmesser CA = c den Grundkreis AMM'A, fälle in einer willkührlichen Entfernung CP = z bis an die Erzeugungslinie KK' die Perpendikulare PQ = u; so kann ein ihr zugehöriger Polarwinkel z. B. ACM, oder was gleich viel ist, der Bogen AM auf dem Grundkreise = α bestimmt werden, es ist nämlich:

$$\mathfrak{B}\alpha = \frac{2\pi u}{b} = 6{,}2832 \cdot \frac{u}{b} \text{ daher auch}$$

$$u = \frac{b\mathfrak{B}.\alpha}{2\pi} = 0{,}15915\, b\, \mathfrak{B}.\alpha$$

Man ziehe aus dem Pole C durch den, mittelst vorstehender Formel, gefundenen Endpunkt des Bogens M, die Linie CN = CP = z. Fällt P'Q' = u' aufwärts über CC'; so wird der Werth von α negativ und $\frac{2\pi u'}{b} = 6{,}2832 \cdot \frac{u'}{b}$ muß von A abwärts nach M' getragen werden. Hierdurch ist es möglich für jedes beliebige u den ihm zugehörigen Punkt N zu bestimmen.

Aus den Eigenschaften der Spirale erhält man die allgemeinen Gleichungen

$$(A.)\ z = c + (a-c) \cdot \frac{\mathfrak{B}.\alpha}{2\pi} = c + (a-c)\frac{\mathfrak{B}.\alpha}{6{,}2832}$$

und $u = \frac{b(z-c)}{(a-c)}$.

Für α = 0 wird z = c; durch diesen Werth ist der Punkt in der Spirale anzugeben, von welchem aus die Gradzählung für den Polarwinkel genommen werden muß. Läßt man den Polarwinkel um gleich große Theile wachsen, so werden auch die Polarabstände in demselben Verhältnisse zunehmen, und wird endlich c = 0 gesetzt, so fällt A in C, und es entsteht die archimedische Spirallinie.

Die Gleichung für dieselbe ist demnach:

$$(B.)\ z = \frac{a\mathfrak{B}.\alpha}{2\pi} = \frac{a\mathfrak{B}.\alpha}{6{,}2832}.$$

Anmerk. Die Entwerfung der archimedischen Spirallinie ist in der bereits angeführten construirenden Geometrie Seite 101 enthalten.

124ste Aufgabe.

Der Halbmesser des Grundkreises AC, Fig. 58, sei = c = 9 Zoll; CB = a = 12 Zoll. Es soll die Lage von drei Punkten der Spirale, das ist für jeden Punkt die Entfernung vom Pole C = z, gefunden werden, wenn ihre Polarwinkel 30°; 172° und 208° zum Gradmaß haben.

Auflösung.

a = 12 Zoll.
c = 9 „

1) Für den Polarwinkel $\alpha = 30°$.

$$(A.)\quad z = c + (a - c)\,\frac{B.\alpha}{6{,}2832}$$

$$z = 9 + (12-9)\,\frac{B.30°}{6{,}2832}$$

$$z = 9 + \frac{3.0{,}52359}{6{,}2832}$$

$$z = 9 + 0{,}24999 = 9{,}25 \text{ Zoll.}$$

2) Für den Polarwinkel $\alpha = 172°$.

$$z = 9 + \frac{3.3{,}00196}{6{,}2832}$$

$$z = 9 + 1{,}4333 = 10{,}4333 \text{ Zoll.}$$

3) Für den Polarwinkel $\alpha = 208°$.

$$z = 9 + \frac{3.3{,}63028}{6{,}2832}$$

$$z = 9 + 1{,}7333 = 10{,}7333 \text{ Zoll.}$$

125ste Aufgabe.

Die archimedische Spirallinie gehe vom Pol C aus, wie in Fig. 59, so daß AC = c = 0 wird; die Weite CB = a sei 6 Zoll; wie viel beträgt die Entfernung der Punkte vom Pole C, deren Polarwinkel gleiche Unterschiede, wie z. B. $\alpha = 70° = 250° = 430°$ haben.

Auflösung.

a = 6 Zoll.

1) Für den Polarwinkel $\alpha = 70°$.

$$(B.)\ s = \frac{aB.\alpha}{6{,}2832}$$

$$s = \frac{6.B.70°}{6{,}2832}$$

$$s = \frac{6.1{,}22173}{6{,}2832} = 1{,}1666 \text{ Zoll.}$$

2) Für den Polarwinkel $\alpha = 250°$.

$$s = \frac{6.B.250°}{6{,}2832}$$

$$s = \frac{6.4{,}36332}{6{,}2833} = 4{,}1666 \text{ Zoll.}$$

3) Für den Polarwinkel $\alpha = 430°$.

$$s = \frac{6.B.430}{6{,}2832} = \frac{B.430°}{1{,}0472}$$

$\text{Bog. } 430° = \text{Bog.}(360° + 70°) = 7{,}504915$

daher $s = \frac{7{,}504915}{1{,}0472} = 7{,}1666$ Zoll.

Anmerk. Weil in diesem Beispiele die Polarwinkel gleiche Differenzen haben; so ergiebt sich ein gleicher Unterschied, auch bei den Entfernungen der drei Punkte vom Pole bis auf Zehntausendtheilchen genau.

126ste Aufgabe.

Es soll die Länge des Bogen CVNWBN′ = B einer archimedischen Spirallinie, Fig. 59, gefunden werden, wenn die Weite CB = a = 16 Zoll, ferner der Polarwinkel α = 480° ist und der Punkt A in C fällt.

Auflösung.

$a = 16$ Zoll.
$\alpha = 480°$.

Auflösung.

$$B = 0{,}07957 . a [\text{B}.\alpha . \sqrt{1+(\text{B}.\alpha)^2} + \text{L}.(\text{B}.\alpha + \sqrt{1+(\text{B}.\alpha)^2})]$$

$$B = 0{,}07957 . 16 [\text{B}.480^\circ \sqrt{1+(\text{B}.480^\circ)^2} + \text{L}.(\text{B}.480^\circ + \sqrt{1+(\text{B}.480^\circ)^2})]$$

$$B = 1{,}27312 [\text{B}.(360^\circ + 120^\circ) . \sqrt{1+(\text{B}.360^\circ + 120^\circ)^2} + \text{L}.(\text{B}.(360^\circ + 120^\circ) + \sqrt{1+(\text{B}.360^\circ + 120^\circ)^2})]$$

$$B = 1{,}27312 [8{,}37758 . \sqrt{1+(8{,}37758)^2} + \text{L}.(8{,}37758 + \sqrt{1+(8{,}37758)^2})]$$

$$B = 1{,}27312 [8{,}37758 . \sqrt{1+70{,}1838} + \text{L}.(8{,}37758 + \sqrt{1+70{,}1838})]$$

$$B = 1{,}27312 [8{,}37758 \times 8{,}43705 + \text{L}.(8{,}37758 + 8{,}43705)]$$

(A.) $B = 1{,}27312 [70{,}682 + \text{L}.16{,}81463]$.

Log. 16,81463 = 1,2256873
Modul = 2,302585
2,4513746
3677061 9
245136
61280
9800
610
L. 16,81463 = 2,8222490

Diesen Werth in (A.) substituirt, erhält man:

$$B = 1{,}27312 [70{,}682 + 2{,}82225]$$

$$B = 1{,}27312 . 73{,}50425$$

$$B = 93{,}579.$$

127ste Aufgabe.

Welche Länge hat die erste Windung CVNWB = W, Fig. 59, und die zweite Windung = W' einer archimedischen Spirallinie, wenn die Weite CB, wie in vorhergehender Aufgabe, = a = 16 Zoll ist und π = 3,1416 bezeichnet.

Auflösung.

1) Berechnung der Länge der ersten Windung CVNWB Fig. 59.

a = 16 Zoll.

π = 3,1416.

$$W = \tfrac{1}{2} a \sqrt{1+4\pi^2} + \frac{a}{4\pi} L.\,[2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}]$$

$$W = \tfrac{1}{2}.16\sqrt{1+4.(3{,}1416)^2} + \frac{16}{4.3{,}1416} L.\,[2.3{,}1416 + \sqrt{1+4.(3{,}1416)^2}]$$

$$W = 8\sqrt{40{,}4784} + 1{,}2732\ L.\,[6{,}2832 + \sqrt{40{,}4784}]$$

$$W = 8.6{,}3622 + 1{,}2732\ L.\,[6{,}2832 + 6{,}3622]$$

(A.) $W = 50{,}8976 + 1{,}2732\ L.\,(12{,}6454)$.

Log. 12,6454 = 1,1019326 × 2,302585 = L. 12,6454, d. i. logarithmisch berechnet = Log. 1,1019326 = 0,0421551; Log. 2,302585 = 0,3622157; 0,4043708 = der Zahl 2,537294, folglich L. 12,6454 = 2,537294. Diesen Werth in (A.) gesetzt, giebt:

$$W = 50{,}8976 + 1{,}2732 . 2{,}537294$$

$$W = 55{,}1281 \text{ Zoll} = 4 \text{ Fuß } 6{,}13 \text{ Zoll}.$$

2) Die Länge der zweiten Windung ist:

$$W' = a\sqrt{1+16\pi^2} + \frac{a}{4\pi} L.\,[4\pi + \sqrt{1+16\pi^2}]$$

$$W' = 16\sqrt{1+16.3{,}1416^2} + \frac{16}{4.3{,}1416} L.\,[4.3{,}1416 + \sqrt{1+16.3{,}1416^2}]$$

$$W' = 16\sqrt{158{,}9136} + 1{,}2732\ L.\,[12{,}5664 + \sqrt{158{,}9136}]$$

$$W' = 16.12{,}6061 + 1{,}2732\ L.\,[12{,}5664 + 12{,}6061]$$

(B.) $W' = 201{,}697 + 1{,}2732\ L.\,25{,}1725$.

Log. 25,1725 = 1,4009264 × 2,302585, das ist: = Log. 1,4009264 = 0,1464153; Log. 2,302585 = 0,3622156; Log. (L. 25,1725) = 0,5086309 = der Zahl 3,2257.

Diesen gefundenen Werth statt L. 25,1725 in (B.) substituirt, giebt:

$$W' = 201{,}697 + 1{,}2732 . 3{,}2257$$

$$W' = 201{,}697 + 4{,}1069 = 205{,}804 \text{ Zoll}.$$

128ste Aufgabe.

Der Krümmungshalbmesser für eine archimedische Spirallinie soll gefunden werden, jedoch mit der Bedingung, daß mit dem Polarwinkel $\alpha = 0$ auch z den Werth $= 0$ erhält, oder der Punkt A in C fällt, Fig. 59, und $CB = a = 10$ Zoll beträgt.

Auflösung.

$a = 10$ Zoll.

$$R = 0{,}07957 . a$$

$$R = 0{,}07957 . 10 = 0{,}7957 \text{ Zoll.}$$

129ste Aufgabe.

Sollte hingegen Fig. 59 für den Werth des Polarwinkels $\alpha = 0$ der Werth von $z = BC = c$ werden, und $a = 7$ Zoll sein; wie groß ist sodann der Krümmungshalbmesser $= R$ für den Polarwinkel $\alpha = 172°$?

Auflösung.

$a = 7$ Zoll.

$\alpha = 172°$.

$$R = \frac{a\sqrt{[1+(\mathfrak{B}.\alpha)^2]^3}}{6{,}2832[2+(\mathfrak{B}.\alpha)^2]}$$

$$R = \frac{7\sqrt{[1+(\mathfrak{B}.172°)^2]^3}}{6{,}2832\,[2+(\mathfrak{B}.172°)^2]}$$

$$R = \frac{7\sqrt{[1+3{,}001966^2]^3}}{6{,}2832[2+3{,}001966^2]}$$

$$R = \frac{7\sqrt{[1+9{,}0118]^3}}{6{,}2832\times 11{,}0118}$$

$$R = 3{,}205 \text{ Zoll.}$$

Anmerk. Am Ende der ersten Windung ist die Länge des Krümmungshalbmessers $R = 2{,}8138 \ldots a$, folglich in vorstehender Aufgabe

$$R = 2{,}8138 . 7 = 19{,}6966 \text{ Zoll.}$$

130ste Aufgabe.

Der Flächeninhalt = F zwischen den Bogen CVN und der Entfernungslinie CN, Fig. 59, soll gefunden werden, wenn A in C fällt. Der Polarwinkel BAN sei = α = 140°, und die Weite CB = a = 8 Zoll.

Auflösung.

a = 8 Zoll.
α = 140°.

$$F = 0{,}00422 \ldots a^2 (\text{B.}\alpha)^3$$
$$F = 0{,}00422 . 8^2 . (\text{B.}140°)^3$$
$$F = 0{,}00422 . 64 . 2{,}44346^2$$
$$F = 0{,}27008 . 2{,}44346^3.$$

Ausführung.

Log. 2,44346 = 0,3879946
106
0,3880052
3
1,1640156
Log. 0,27008 = 0,4314924 — 1
0,5955080, hierzu gehört 3,9401, daher ist
F = 3,9401 □Zoll.

131ste Aufgabe.

Wie viel beträgt die Fläche CVNWBC = F, Fig. 59, welche von der ersten Windung CVNWB und der Entfernungslinie BC = a = 16 Zoll begrenzt ist?

Auflösung.

a = 16 Zoll.

$$F = 1{,}0472 . a^2$$
$$F = 1{,}0472 . 16^2$$
$$F = 268{,}08 \text{ □Zoll}.$$

132ste Aufgabe.

Es soll der Flächeninhalt = F' desjenigen Theiles der Spirale gefunden werden, welcher zwischen den Bogen CVN

und BW'N' und den beiden Linien CB und NN', Fig. 59, enthalten ist, wenn die Weite BC = a = 10 Zoll und der Polarwinkel BCN' = α = 160° beträgt.

Auflösung.

a = 10 Zoll.

α = 160°.

$F' = 1{,}0472 \cdot a^2 [(1+0{,}15915 \cdot B.\alpha)^3 - 2]$

$F' = 1{,}0472 \cdot a^2 [(1+0{,}15915\, B.\, 160°)^3 - 2]$

$F' = 1{,}0472 \cdot a^2 [(1+0{,}15915 \cdot 2{,}79252)^3 - 2]$

$F' = 1{,}0472 \cdot a^2 [(1{,}44443)^3 - 2]$

$F' = 1{,}0472 \times 100 [1{,}44443^3 - 2]$

$F' = 104{,}72 \cdot (3{,}01363 - 2)$

$F' = 104{,}72 \cdot 1{,}01363$

$F' = 106{,}146$ □Zoll.

Anmerk. Es würde den vorgesetzten Zweck dieses Buches überschreiten, ähnliche Auflösungen von paraboliſchen, hyperboliſchen und logarithmiſchen Spirallinien zu geben, weil dieſelben im Geſchäftsleben wenig Anwendung finden. Statt derſelben möge hier noch eine Anleitung zu Auffindung des Schwerpunktes von geradlinigen und krummlinigen Flächen und Körpern folgen.

Beſtimmung des Schwerpunktes von geraden und krummen Linien, ſo wie von gerad- und krummlinigen Flächen und Körpern.

§. 50.

Der Schwerpunkt einer Linie, einer Fläche oder eines Körpers iſt derjenige, der allein unterſtützt, jede dieſer Raumgrößen in allen Lagen ruhend erhält. Sämmtliche Linien, welche durch den Schwerpunkt gelegt werden, heißen Durchmeſſer der Schwere; halbiren ſie ſich, ſo liegt der Schwerpunkt in ihrem Durchſchnittspunkte.

Den gemeinschaftlichen Schwerpunkt von mehreren, in einer Ebene liegenden schweren Punkten durch Rechnung zu finden.

§. 51.

Man denke sich IGHI, Fig. 60, als eine gewichtlose Ebene und in derselben die schweren Punkte A, B, C, D ꝛc., deren Gewicht gegeben ist, so kann ihr gemeinschaftlicher Schwerpunkt auf folgende Weise gefunden werden:

Man ziehe zwei Linien VW und XY, die sich nicht unter einem allzu spitzen oder stumpfen Winkel schneiden; dieselben werden Momenten-Axen genennet; fälle aus jedem schweren Punkte z. B. aus A die Perpendikularen Aa und Aa′ auf XY und VW, ferner aus B die Perpendicularen Bb und Bb′ u. s. w., so erhält man die Entfernungen dieser Punkte von beiden Momenten-Axen. Das Produkt einer dieser Entfernungen mit dem Gewichte des ihr zugehörigen schweren Punktes multiplicirt, wird das Moment desselben genennet; so ist z. B., wenn A das Gewicht des schweren Punktes und Aa die Entfernung desselben bezeichnet, A . Aa das Moment von A für die Momenten-Axe XY und A . Aa′ das Moment für VW u. s. w.

Werden die Momente sämmtlicher schweren Punkte für eine Momenten-Axe addirt und die erhaltene Summe durch die Summe der Gewichte dividirt, so giebt der Quotient die Entfernung des gemeinschaftlichen Schwerpunktes von dieser Momenten-Axe.

Es sei z. B. das Gewicht von A = P′h; von B = P″h; von C = P‴h, und von D = P⁗h.

Die Entfernung von der Momenten-Axe XY; Aa = a; Bb = b: Cc = c; Dd = d.

Die Entfernung von der Momenten-Axe VW; Aa′ = a′; Bb′ = b′; Cc′ = c′ und Dd′ = d′.

Es möge ferner E die Entfernung des allgemeinen Schwerpunktes von XY, und E′ die Entfernung desselben von VW bezeichnen, so ist

$$E = \frac{a.P + b.P' + c.P'' + d.P'''}{P + P' + P'' + P'''}$$

und $$E' = \frac{a'P + b'P' + c'P'' + d'P'''}{P + P' + P'' + P'''}$$

Die gefundenen Werthe von E und E' trage man aus irgend einem Punkte K und Q auf die in selbigen errichteten Perpendikularen nach L und N, und ziehe durch L mit XY so wie durch N mit VW Parallelen, so ist der Durschnittspunkt M der allgemeine Schwerpunkt von A, B, C und D.

Anmerk. Werden die Momenten-Axen VW und XY zwischen den schweren Punkten ABCD angenommen, daß z. B., wie in Fig. 61, C und D jenseit von VW und XY zu liegen kommen; so werden die nach der einen Seite liegenden mit +, und die nach der andern Seite liegenden mit — bezeichnet, und die für die Momente erhaltenen Produkte nach den Eigenschaften entgegengesetzter Größen algebraisch addirt. In Fig. 61 würde demnach mit Beibehaltung der vorhergehenden Bezeichnung,

$$E = \frac{aP + bP' - cP'' - dP'''}{P + P' + P'' + P'''} \text{ und}$$

$$E' = \frac{a'P + b'P' + c'P'' + d'P'''}{P + P' + P'' + P'''} \text{ sein.}$$

133ste Aufgabe.

An einer gewichtlosen Ebene FGHI, Fig. 60, sei A ein Gewicht $P = 4$ ℔; in $B = P' = 6$ ℔; in $C = P'' = 12$ ℔ in $D = P''' = 6$ ℔ befestiget. Die Entfernung des Punktes A von der Momenten-Axe XY sei $a = 4$ Zoll; $B = b = 5$ Zoll; $C = c = 10$ Zoll, und $D = d = 8$ Zoll; die Entfernung von der Momenten-Axe VW des Punktes A, $= a' = 3$ Zoll; $B = b' = 8$ Zoll; $C = c' = 10$ Zoll, und $D = d' = 9$ Zoll. Welche Entfernung hat der allgemeine Schwerpunkt M von XY und VW?

Auflösung.

1) Berechnung der Entfernung des Schwerpunktes von der Momenten-Axe XY.

P = 4 ℔
P′ = 6 ℔
P″ = 12 ℔
P‴ = 6 ℔
a = 4″
b = 5″
c = 10″
d = 8″
a′ = 3″
b′ = 8″
c = 10″
d = 9″.

$$E = \frac{aP + bP' + cP'' + dP'''}{P + P' + P'' + P'''}$$

$$E = \frac{4.4 + 5.6 + 10.12 + 8.6}{4 + 6 + 12 + 6}$$

$$E = \frac{16 + 30 + 120 + 48}{4 + 6 + 12 + 6}$$

$$E = \frac{214}{28} = 7\frac{9}{14} \text{ Zoll.}$$

2) Berechnung der Entfernung des Schwerpunktes von der Momenten-Axe VW.

$$E' = \frac{a'P + b'P' + c'P'' + d'P'''}{P + P' + P'' + P'''}$$

$$E' = \frac{3.4 + 8.6 + 10.12 + 9.6}{4 + 6 + 12 + 6}$$

$$E' = \frac{12 + 48 + 120 + 54}{28}$$

$$E' = \frac{234}{28} = 8\frac{5}{14} \text{ Zoll.}$$

Den Werth von $E = 7\frac{9}{14}$ Zoll trage man, Fig. 60, aus K nach L, und den Werth von $E' = 8\frac{5}{14}$ Zoll aus Q nach N, ziehe durch L und N Parallelen mit XY und VW, so giebt der Durchschnittspunkt M, die Lage des allgemeinen Schwerpunktes für A, B, C und D.

Bestimmung des Schwerpunktes von den Umfangslinien eines Dreiecks.

§. 52.

Es ist oft nothwendig, Linien als schwer anzunehmen und ihre Längen als Gewichte zu betrachten. Diesem nach

werden auch gleich große Theile der Linie, ein gleiches Gewicht haben und der Schwerpunkt jeder geraden Linie wird in ihre Mitte zu liegen kommen, in welcher man sich die Länge derselben als Gewicht denken kann.

Sind daher die drei Linien AB, BC und AC, Fig. 62, mit ihren Endpunkten an einander gesetzt, so bilden sie den Umfang des △ABC. Man denke sich obiger Vorstellung gemäß die Längen der Linien (z. B. AB = a; AC = b und BC = c) in der Mitte dieser Linien als Gewichte angebracht, zu welchen die Entfernungen des allgemeinen Schwerpunktes M von den drei Seitenlinien gefunden werden sollen.

Zu dieser Bestimmung ist es nothwendig, aus jedem Eckpunkte des Dreiecks eine Perpendikulare auf die gegenüberliegende Seitenlinie zu fällen, und sowohl diese Perpendikularen, als die Seitenlinien zu messen. Es möge deshalb AD = a'; BE = b' und CF = c' sein; auch soll x die Entfernung des Schwerpunkts M von AB; y von BC; z von AC bezeichnen, und S = der Summe der drei Seitenlinien = (a + b + c) sein. Nach erwiesenen statischen Lehrsätzen ist sodann die Entfernung des Schwerpunktes M

$$\text{von AB} = x = \frac{c'(S.-c)}{2S.}$$

$$\text{von BC} = y = \frac{a'(S.-a)}{2S.}$$

$$\text{von AC} = z = \frac{b'(S.-b)}{2S.}$$

134ste Aufgabe.

Für den Umfang des Dreiecks ABC, Fig. 62, soll der Schwerpunkt M durch Rechnung gefunden werden. Es sei deshalb BC = a = 3'9"; AC = b = 4' und AB = c = 2'6"; ferner die Perpendiculare AD = a' = 2'5"; BE = b' = 2'3" und CF = c' = 3'7"; wie groß ist die Entfernung des Schwerpunktes M von jeder der Seitenlinien des Dreiecks?

Auflösung.

$a = 3{,}9'$
$b = 4'$
$c = 2{,}6'$
$a' = 2{,}5'$
$b' = 2{,}3'$
$c' = 3{,}7'$

Hier ist $S. = (a+b+c) = (3{,}9+4+2{,}6) = 10{,}5'$

$$x = \frac{c'(S.-c)}{2S.} = 3{,}7\,\frac{(10{,}5-2{,}6)}{21} = 1{,}39'$$

$$y = \frac{a'(S.-a)}{2S.} = 2{,}5\,\frac{(10{,}5-3{,}9)}{21} = 0{,}785'$$

$$z = \frac{b'(S.-b)}{2S.} = 2{,}3\,\frac{(10{,}5-4}{21} = 0{,}711'$$

Bestimmung des Schwerpunktes eines Kreisbogens nach seiner Entfernung vom Mittelpunkte.

§. 53.

Der Halbmesser des Bogens ADB, Fig. 63, sei $CD = r$; das Gradmaß des Bogens $ADB = \alpha$. Bezeichnet D die Mitte des Bogens, so ist CD ein Durchmesser der Schwere, und der Schwerpunkt M kommt in selbigen zu liegen. Seine Entfernung vom Mittelpunkte ist sodann

$$CM = \frac{2rS.\frac{1}{2}\alpha}{B.\alpha}.$$

135ste Aufgabe.

Der Bogen ADB, Fig. 63, habe zum Gradmaße $= \alpha$ 83° 30′; der Halbmesser CD sei $= r = 2'3''$ Decimalmaß. Wie groß ist die Entfernung des Schwerpunktes vom Mittelpunkte C?

Auflösung.

$\alpha = 83°\ 30'.$
$r = 2'3'.$

$$CM = \frac{2r \,.\, S.\tfrac{1}{2}\alpha}{B.\alpha}$$

$$(A.)\quad CM = \frac{2 \,.\, 2{,}3\, S.\, 41^\circ\ 45'}{B\ 83^\circ\ 30'.}$$

Ausübung.

Log. S. 41° 45′ = 0,8233971 — 1, hierzu gehört der Sinus
= 0,66588 (B)

Ferner ist B. 83° = 1,44862
" 30′ = 0,00872
folglich B.α = 1,45734 (C.).

Die Werthe von (B.) und (C.) in (A.) substituirt, geben:

$$CM = \frac{4{,}6 \,.\, 0{,}66588}{1{,}45734}$$

Log. 4,6 = 0,6627578
Log. 0,66588 = 0,8233960 — 1
0,4861538
Log. 1,45734 = 0,1635609
0,3225929 = 2,1018′ = CM.

Anmerk. Wollte man die Entfernung des Schwerpunktes M vom Scheitelpunkte D wissen, so kann dieselbe unmittelbar durch die Formel

$$DM = r\left[\frac{B.\alpha - 2\,S.\tfrac{1}{2}\alpha}{B.\alpha}\right]$$

gefunden werden.

Für den Quadranten des Kreises ist die Entfernung CM = 0,9 . r, und für den halben Kreis CM = $\frac{7}{11}$. r. Es verstehet sich übrigens von selbst, daß die Bogen, zu welchen der Schwerpunkt auf diese Weise gefunden werden soll, in horizontaler Lage gedacht werden müssen, weil der Schwerpunkt eines vertikal gestellten Bogens in den Bogen selbst, und zwar in die Mitte seiner Krümmung fällt.

§. 54.

Zuweilen ist es nothwendig den Schwerpunkt eines Bogens durch seinen horizontalen und vertikalen Abstand aus der

gegebenen Abscisse und der ihr zugehörigen Ordinate zu finden. Deshalb möge in Fig. 64, B der Anfangspunkt der Abscissen; BG die Abscisse des Bogens BH = x; GH dessen Ordinate = y; CB = r der Halbmesser und α das Gradmaß des Bogens BH sein.

Man findet sodann den horizontalen Abstand des Schwerpunktes

$$HD = \left(y - \frac{x}{B.\alpha}\right)$$

und den in D errichteten Vertikalabstand

$$DM = \left(x - r + \frac{y}{B.\alpha}\right).$$

136ste Aufgabe.

Der Bogen BH, Fig. 64, sei mit dem Halbmesser CB = r = 8′ beschrieben; sein Gradmaß betrage = α = 43°. In B sei der Anfangspunkt der Abscissen und BG = x = 2′1″3‴, so wie GH = y = 5′4″. Wie groß sind die Abstände HD und DM zu Bestimmung des Schwerpunktes M anzunehmen?

Auflösung.

1) Bestimmung des horizontalen Abstandes HD.

r = 8′
x = 2,13′
y = 5,4′
α = 43°.

$$HD = y - \frac{x}{B.\alpha}$$

$$y = 5{,}4 - \frac{2{,}13}{B.43°}$$

$$y = 5{,}4 - \frac{2{,}13}{0{,}7505}$$

$$y = 5{,}4 - 2{,}8381$$

$$y = 2{,}5619' = 2'5{,}62''$$

2) Bestimmung des vertikalen Abstandes DM.

$$MD = x - r + \frac{y}{B.\alpha}$$

$$MD = 2{,}138 - 8 + \frac{5{,}4}{B.43°}$$

$$MD = 2{,}13 - 8 + \frac{5{,}4}{0{,}7505}$$

$$MD = -5{,}87 + 7{,}1952$$

$$MD = 1{,}3252' = 1'3{,}25''$$

137ste Aufgabe.

Der Schwerpunkt M′ des unteren Theils vom Quadranten, das ist vom Bogen AH, Fig. 64, soll durch den horizontalen Abstand AI und den vertikalen Abstand IM′ bestimmt werden, wenn, wie in vorhergehender Aufgabe $BG = x = 2'1''3'''$; $HG = y = 5{,}4''$; $BC = r = 8'$ und das Gradmaß des Bogens $HB = \alpha = 43°$ ist.

Auflösung.

1) Bestimmung des horizontalen Abstandes AI.

$r = 8'$
$x = 2{,}13'$
$y = 5{,}4'$
$\alpha = 43°$

$$AI = r - \frac{(r-x)}{1{,}5708 - B.\alpha}$$

$$AI = 8 - \frac{(8-2{,}13)}{1{,}5708 - B.43°}$$

$$AI = 8 - \frac{5{,}87}{1{,}5708 - 0{,}7055}$$

$$AI = 8 - \frac{5{,}87}{0{,}8203}$$

$$AI = 8 - 7{,}1559$$

$$AI = 0{,}8441' = 8'441''.$$

2) Bestimmung des vertikalen Abstandes IM′.

$$IM' = \frac{r-y}{1{,}5708 - B.\alpha}$$

$$IM' = \frac{8-5{,}4}{1{,}5708 - B\,43°}$$

$$IM' = \frac{8-5{,}4}{1{,}5708 - 0{,}7505}$$

$$IM' = \frac{2{,}6}{0{,}8203}$$

$$IM' = 3{,}1695' = 3'1{,}695''.$$

138ste Aufgabe.

Der Bogen HB, Fig. 64, sei der 8te Theil vom Umfange des ihm zugehörigen Kreises und der Halbmesser des Bogens CB = r = 2 Ellen 8 Zoll; welche Länge erhält der horizontale und vertikale Abstand HD und DM seines Schwerpunktes M?

Auflösung.

$r = 2\frac{1}{3}$ Elle.

$$HD = 0{,}3342 . r$$
$$HD = 0{,}3342 . 2\tfrac{1}{3}$$
$$HD = 0{,}7798 \text{ Ellen} = 18{,}715 \text{ Zoll.}$$

Ferner:

$$DM = 0{,}1932 . . r$$
$$DM = 0{,}1932 . 2\tfrac{1}{3}$$
$$DM = 0{,}4508 \text{ Ellen} = 10{,}8192 \text{ Zoll.}$$

Anmerk. Für den Viertelkreis AB, Fig. 55, ist der horizontale Abstand des Schwerpunktes $M' = AE = 0{,}3634 . r$, und der Vertikal-Abstand $EM' = 0{,}6366 . r$.

Die Entfernung des Schwerpunktes eines parabolischen Bogens vom Scheitelpunkte der Parabel zu bestimmen.

§. 55.

Ehe noch die Entfernung des Schwerpunktes eines parabolischen Bogens durch Rechnung gefunden werden kann, so ist zuvor die Länge desselben zu bestimmen. Es sei deshalb in Fig. 66 die Länge des Bogens AB = B und der Parameter der Parabel = p und dann erhält man für die Länge des Bogens:

$$B = \frac{y}{2p}\sqrt{(p^2+4y^2)} + \frac{p}{4} L. \left[\frac{2y+\sqrt{(p^2+4y^2)}}{p}\right]$$

Diese Länge als bekannt vorausgesetzt, ist sodann die vertikale Entfernung vom Scheitelpunkte:

$$BE = \frac{y\sqrt{(p^2+4y^2)^3} - p^3 B}{16 p^2 B}$$

und die horizontale Entfernung von der Axe:

$$EM = \frac{\sqrt{(p^2+4y^2)^3}-p^3}{12\,pB}$$

139ste Aufgabe.

Der Parameter des baraboliſchen Bogens AB, Fig. 66, ſei $= p = 4'$; die Abſciſſe $BD = x = 9'$, folglich iſt die Ordinate $AD = y = \sqrt{px} = \sqrt{4.9}\,\sqrt{36} = 6'$. Welche verticale und horizontale Entfernung BE und EM hat der Schwerpunkt M dieſes Bogens?

Auflöſung.

1) Beſtimmung der Länge des Bogens $AB = B$.

$p = 4'$
$x = 9'$.
$y = 6'$.

$$B = \frac{y}{2p}\sqrt{(p^2+4y^2)} + \frac{p}{4}\,L.\left[\frac{2y+\sqrt{(p^2+4y^2)}}{p}\right]$$

$$B = \frac{6}{2.4}\sqrt{(4^2+4.6^2)} + \frac{4}{4}\,L.\left[\frac{2.6+\sqrt{(4^2+4.6^2)}}{4}\right]$$

$$B = \tfrac{3}{4}\sqrt{160} + L.\left[\frac{12+\sqrt{160}}{4}\right]$$

(A.) $B = \frac{3}{4}, 12{,}6491 + L.\,[6{,}1623]$

Log. 6,1623 = 0,7897428
Modul = 2,302585
1,5794856
2369228 4
157948
39485
6312
390

L. [6,1623] = 1,8184498

Dieſen Werth in (A.) ſubſtituirt, giebt:

$B = 9{,}4868 + 1{,}8184$

$B = 11{,}3052'$.

2) Bestimmung der vertikalen Entfernung des Schwerpunktes M vom Scheitelpunkte der Parabel.

$$BE = \frac{y\sqrt{(p^2+4y^2)^3}-p^3.B}{16p^2.B}$$

$$BE = \frac{6\sqrt{4^2+4.6^2)^3}-4^3.11{,}3052}{16.4^2.11{,}3052}$$

$$BE = \frac{6.\sqrt{160^3}-723{,}5328}{2894{,}1312}$$

$$BE = \frac{12143{,}14-723{,}5328}{2894{,}1312}$$

$$BE = \frac{11419{,}6092}{2894{,}1312} = 3{,}9457'.$$

3) Bestimmung der horizontalen Entfernung des Schwerpunktes M von der Axe der Parabel.

$$EM = \frac{\sqrt{(p^2+4y^2)^3}-p^3}{12.p.B.}$$

$$EM = \frac{\sqrt{(4^2+4.6^2)^3}-4^3}{12.4.11{,}3052}$$

$$EM = \frac{\sqrt{160^3}-64}{542{,}6496}$$

$$EM = \frac{2023{,}8574-64}{542{,}6496}$$

$$EM = \frac{1959{,}8574}{542{,}6496} = 3{,}6116'$$

Den Schwerpunkt ebener Flächen zu finden.

§. 56.

Der Schwerpunkt jedes Parallelogramms liegt in dem Durchschnittspunkte seiner Diagonalen, weil selbige als Durchmesser der Schwere zu betrachten sind. Die Auffindung des Schwerpunktes von einem Parallelogramm kann daher ohne weitere Rechnung geschehen.

Bestimmung des Schwerpunktes einer Dreiecksfläche.

§. 57.

Man theile die Seitenlinien des Dreiecks, Fig. 67, in zwei gleiche Theile und verbinde die Theilungspunkte mit dem gegenüberliegenden Endpunkte des Dreiecks durch die Linien AF, BD und CE, so schneiden sich selbige in dem Schwerpunkte M, und es ist sodann $DM = \frac{1}{3} BD$; $EM = \frac{1}{3} EC$ und $FM = \frac{1}{3} AF$.

Man hat daher nur eine dieser Linien z. B. BD zu ziehen und solche in drei gleiche Theile zu theilen, wo sodann der Schwerpunkt in dem Endpunkt des ersten Drittels von der Grundlinie, oder in dem des zweiten Drittels, von der Spitze aus zu liegen kommt.

Der Schwerpunkt einer Dreiecksfläche ABC, Fig. 68, kann auch auf folgende Weise gefunden werden: Man ziehe zwei Linien außerhalb des Dreiecks z. B. DE und GH, und betrachte sie als Momenten-Axen; fälle aus jedem Eckpunkte des Dreiecks Perpendikularen auf obige Linien, z. B. aus A die Perpendikularen AD und AI; aus B die Perpendikularen BF und BG u. s. w.; messe jede derselben, so giebt das Drittel der Summe der zusammengehörigen Perpendicularen die Entfernung des Schwerpunktes von der Momenten-Axe. So ist z. B. die Entfernung desselben von $DE = \frac{AD + BF + CE}{3}$ und von $GH = \frac{BG + AI + CH}{3}$.

Diese durch Rechnung gefundenen Entfernungen, trage man auf die in einem willkührlichen Punkte errichtete Perpendikulare z. B. aus D nach K, und aus G nach L, und ziehe durch K und L Parallelen mit DE und GH, so liegt der Schwerpunkt M in dem Durchschnittspunkte dieser Parallelen.

140ste Aufgabe.

Es soll zu der Dreiecksfläche ABC, Fig. 68, mittelst der gegebenen Momenten-Axen DE und GH der Schwerpunkt ge-

funden werden, wenn AD = a = 2′; BF = b = 4′ 4″; CE = c = 1′ 2″; ferner BG = b′ = 7″; AI = a′ = 3′ 4″, und CH = c′ = 1′ 2″ gefunden worden ist. Auch soll die Entfernung des Schwerpunktes M von DE mit x, und von GH mit y bezeichnet sein.

Auflösung.

Nach vorstehender Anleitung ist demnach:

a = 2′
b = 4,4′
c = 1,2′
a′ = 3,4′
b′ = 0,7′
c′ = 1,2′

$$DK = x = \frac{a+b+c}{3}$$

$$x = \frac{2'+4{,}4'+1{,}2}{3} = \frac{7{,}6}{3} = 2{,}53'$$

$$\text{und } GL = y = \frac{a'+b'+c'}{3}$$

$$y = \frac{3{,}4'+0{,}7'+1{,}2'}{3} = \frac{5{,}3}{3} = 1'76'.$$

Den Schwerpunkt der Fläche eines Trapezes durch Rechnung zu finden.

§. 58.

Man theile die gleichlaufenden Linien des Trapezes BC und AD, Fig. 69, in zwei gleiche Theile und verbinde ihre Theilungspunkte E und F durch die Linie EF, welche sodann ein Durchmesser der Schwere ist. Setzt man das Maß der längeren Parallele AD = a; der kürzeren BC = b, und die Länge der Verbindungslinie EF = c, so ist die Entfernung des Schwerpunktes M, von der längeren Parallele auf EF genommen:

$$FM = \frac{c\,(2b+a)}{3\,(a+b)}$$

und von der kürzeren Parallele BC

$$EM = \frac{c\,(b+2a)}{3\,(a+b)}$$

141ste Aufgabe.

Von dem Trapeze ABCD, Fig. 69, soll die Entfernung des Schwerpunktes von der größeren Parallele AD, das ist die Entfernung FM gefunden werden, wenn AD = a = 4′ 3″; BC = b = 2′ 6″, und EF = c = 2′ 2″ beträgt.

Auflösung.

a = 4,3′
b = 2,6′
c = 2,2′.

$$FM = \frac{c(2b+a)}{3(a+b)}$$

$$FM = \frac{2{,}2\,(2.2{,}6+4{,}3)}{3\,(4{,}3+2{,}6)}$$

$$FM = \frac{2{,}2.9{,}5}{3.6{,}9}$$

$$FM = \frac{20{,}90}{20{,}7} = 1{,}01' = 1'0{,}1''.$$

Von der kleinen Parallele BC ist die Entfernung des Schwerpunktes:

$$EM = \frac{c(b+2a)}{3(a+b)}$$

$$EM = \frac{2{,}2\,(2{,}6+2.4{,}3)}{3\,(4{,}3+2{,}6)}$$

$$EM = \frac{2{,}2.11{,}2}{3.6{,}9}$$

$$EM = 1{,}19' = 1'1{,}9''.$$

Den allgemeinen Schwerpunkt einer jeden geradlinigen Fläche, mittelst zweier angenommenen Momenten-Axen, durch Rechnung zu bestimmen.

§. 59.

Hierbei ist folgendes Verfahren zu beobachten:

1) Man theile die geradlinige Fläche ABCDE, Fig. 70, durch Diagonalen in Dreiecke ABC, ACD, ADE, und finde nach Anleitung des 57sten §. die Schwerpunkte M, M′, M″.

2) Berechne man den Flächeninhalt jedes Dreiecks nach dem der Figur zugehörigen Maßstabe.

3) Ziehe die beiden Momenten-Axen VX und VW unter einem Winkel in willkührlicher Lage; fälle aus jedem Schwerpunkte Perpendicularen auf die beiden Momenten-Axen und messe ihre Längen. Die Entfernung des allgemeinen Schwerpunktes für jede Momenten-Axe wird sodann erhalten, wenn man die Momente (d. i. die Produkte der Entfernungen in die Inhalte der Dreiecke) addirt, und diese Summe durch die Summe der Inhalte dividirt.

Es sei z. B. der Flächeninhalt des $\triangle ABC = P$
" " " " $\triangle ACD = Q$
" " " " $\triangle ADE = R$

Die Entfernungen der Schwerpunkte von der Momenten-Axe VX sind $FM = a$; $GM' = b$; $HM'' = c$, und von der Momenten-Axe VW; $IM = a'$; $LM' = b'$; $KM'' = c'$. Die Entfernung des allgemeinen Schwerpunktes N von der Momenten-Axe VX ist demnach:

$$y = \frac{aP + bQ + cR}{P + Q + R}$$

und von der Momenten-Axe VW

$$z = \frac{a'P + b'Q + c'R}{P + Q + R}$$

Man errichte nun in einem willkührlichen Punkte der Momenten-Axen die Perpendikularen $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$; trage auf erstere den gefundenen Werth von y, aus α nach β, so wie den Werth von z, aus γ nach δ und ziehe durch die Endpunkte β und δ Parallelen mit den Momenten-Axen, so zeigt der Durchschnittspunkt N, den Schwerpunkt für die Fläche ABCDE.

142ste Aufgabe.

In der irregulairen geradlinigen Figur ABCDE, Fig. 70, sei der Flächeninhalt des $\triangle ABC = P = 2{,}975\square'$; des $\triangle ACD = Q = 3{,}15\square'$; des $\triangle ADE = R = 1{,}947\square'$; ferner die Entfernung der Schwerpunkte M, M' M'' von den

Momenten-Axe VX, nämlich FM = a = 1,6', GM' = b = 2,6' und HM'' = c = 2,1' und von der Momenten-Axe VW die Entfernung IM = a' = 3,1'; LM' = b' = 2,1' und KM'' = c' = 1,2' gefunden worden. Wie groß ist die Entfernung des Schwerpunktes N von jeder der beiden Momenten-Axen?

Auflösung.

1) Bestimmung der Entfernung $\alpha\beta = y$ von VX.

$P = 2{,}975\square'$
$Q = 3{,}15\square'$
$R = 1{,}947\square'$
$a = 1{,}6'$
$b = 2{,}6'$
$c = 2{,}1'$
$a' = 3{,}1'$
$b' = 2{,}1'$
$c' = 1{,}2'$.

$$y = \frac{aP + bQ + cR}{P + Q + R}$$

$$y = \frac{1{,}6 \cdot 2{,}975 + 2{,}6 \cdot 3{,}15 + 2{,}1 \cdot 1{,}947}{2{,}975 + 3{,}15 + 1{,}947}$$

$$y = \frac{4{,}76 + 8{,}19 + 4{,}09}{8{,}07}$$

$$y = \frac{17{,}04}{8{,}07} = 2{,}11' = 2'\,1'\,1''.$$

2) Bestimmung der Entfernung $\gamma\delta = z$ von VW.

$$z = \frac{a'P + b'Q + c'R}{P + Q + R}$$

$$z = \frac{3{,}1 \cdot 2{,}975 + 2{,}1 \cdot 3{,}15 + 1{,}2 \cdot 1{,}947}{2{,}975 + 3{,}15 + 2{,}3364}$$

$$z = \frac{9{,}2225 + 6\,615 + 2{,}3364}{8{,}072}$$

$$z = \frac{18{,}1739}{8{,}072} = 2{,}2514' = 2'2{,}514''.$$

Den Schwerpunkt eines Kreisausschnittes zu bestimmen.

§. 60.

Wenn auf die Mitte des Bogens ADB, Fig. 71, ein Halbmesser gezogen wird, so ist selbiger ein Durchmesser der Schwere und gehet durch den Schwerpunkt M des Bogens. Kennt man das Gradmaß des Bogens ADB = α, und den

Halbmesser CA = CD = CB = r; so ist die Entfernung des Schwerpunktes M vom Mittelpunkte C des Bogens.

$$CM = \frac{4rS.\frac{1}{2}\alpha}{3B.\alpha}$$

Würde hingegen die Entfernung des Schwerpunktes vom Scheitelpunkte D des Bogens verlangt, so ist:

$$DM = r\left[1 - \frac{4S.\frac{1}{2}\alpha}{3B.\alpha}\right]$$

143ste Aufgabe.

Der Bogen ADB eines Kreisausschnitts CADBC, Fig. 71, enthalte = α = 95°, und der Halbmesser desselben AC = CD = CB = r = 4 Fuß; welche Entfernung CM hat der Schwerpunkt des Kreisausschnitts vom Mittelpunkte C?

Auflösung.

α = 95°.
r = 4 Fuß.

$$CM = \frac{4rS.\frac{1}{2}\alpha}{3B.\alpha}$$

$$CM = \frac{4.4.S.47°30'}{3B.95°}$$

$$CM = \frac{16.0{,}7372}{3.1{,}6580}$$

$$CM = \frac{11{,}7952}{4{,}9740} = 2{,}371 \text{ Fuß.}$$

Anmerk. Für den Quadranten der Kreisfläche ist die Entfernung des Schwerpunktes M vom Mittelpunkte C, CM = 0,6002.r und für die halbe Kreisfläche CM = 0,4244.r.

Den Schwerpunkt der Fläche des massiven Bogens eines Tonnengewölbes zu finden.

§. 61.

144ste Aufgabe.

Es soll die Entfernung des Schwerpunktes M vom Mittelpunkte E im Profile Fig. 72 zu der, zwischen den beiden

concentrischen Bogen ADB und EgF enthaltenen Fläche eines Tonnengewölbes gefunden werden, wenn der Halbmesser des äußeren Bogens AC = CD = CB = R = 5 Ellen und die Gewölbstärke AE = 16 Zoll, folglich der Halbmesser des inneren Bogens EC = r = 4 Ellen 8 Zoll ist, und der Bogen ADB = α = 130° beträgt.

Auflösung.

R = 5 Ellen.
r = $4\frac{1}{3}$ Elle.
α = 130°

$$CM = \frac{4S.\frac{1}{2}\alpha(R^3-r^3)}{3B.\alpha(R^2-r^2)}$$

$$CM = \frac{4.S.65°(5^3-(4\frac{1}{3})^3)}{3B.130°(5^2-(4\frac{1}{3})^2)}$$

$$CM = \frac{4.0{,}9063\,(125-81{,}3703)}{3.2{,}2689\,(25-18{,}7777)}$$

$$CM = \frac{3{,}6252 \cdot 43{,}6297}{6{,}8067 \cdot 6{,}2223}$$

CM = 3,7344 Ellen = 3 Ellen 17,62 Zoll.

145ste Aufgabe.

An einem vollcirkelförmigen Tonnengewölbe, Fig. 73, sei der Halbmesser des äußern Halbkreises AC = CD = R = 4 Ellen, und der Halbmesser des inneren CE = r = 3 Ellen 12 Zoll. In welcher Entfernung vom Mittelpunkte C liegt der Schwerpunkt M?

Auflösung.

R = 4 Ellen.
r = $3\frac{1}{2}$ Elle.

$$CM = 0{,}4244 \cdot \left[\frac{R^3-r^3}{R^2-r^2}\right]$$

$$CM = 0{,}4244 \left[\frac{4^3-(3\frac{1}{2})^3}{4^2-(3\frac{1}{2})^2}\right]$$

$$CM = 0{,}4244 \left[\frac{64-42{,}875}{16-12{,}25}\right]$$

$$CM = \frac{0{,}4244 \cdot 21{,}125}{3{,}75}$$

$$CM = 2{,}3908 \text{ Ellen} = 2 \text{ Ellen } 9{,}3 \text{ Zoll.}$$

Anmerk. Sollte ſtatt des Halbmeſſers vom äußeren und inneren Bogen, der Halbmeſſer des mittleren Bogens KFG, das iſt: $CK = CF = CG = \varrho$ und die Stärke des Gewölbes $AE = b$ gegeben ſein, ſo wird in beiden Formeln dieſer und der vorhergehenden Aufgabe $\frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}$ zu $\frac{12\varrho^2 + b^2}{8\varrho}$ und daher hier $CM = 0{,}4244 \left[\frac{12\varrho^2 + b^2}{8\varrho}\right] = 0{,}05305 \left[\frac{12\varrho^2 + b^2}{\varrho}\right]$. Unter derſelben Bedingung wird in der 144ſten Aufgabe $CM = \frac{4 S.\frac{1}{2}\alpha}{3 B.\alpha}\left[\frac{12\varrho^2 + b^2}{8\varrho}\right] = \frac{S.\frac{1}{2}\alpha}{6 B.\alpha}\left[\frac{12\varrho^2 + b^2}{\varrho}\right]$

Die Entfernung des Schwerpunktes eines Kreisabſchnittes zu finden.

§. 62.

146ſte Aufgabe.

Der Bogen ADB eines Kreisſegments, Fig. 74, betrage $= \alpha = 100°$, und ſein Halbmeſſer $AC = CD = CD = r = 8$ Fuß; welche Entfernung CM hat ſein Schwerpunkt M vom Mittelpunkte desſelben?

Auflöſung.

$r = 8$ Fuß.
$\alpha = 100°$.

$$CM = \frac{4r(S.\frac{1}{2}\alpha)^3}{3[B.\alpha - S.\alpha]}$$

$$CM = \frac{4.8(S.50°)^3}{3[B.100° - S.100°]}$$

$$CM = \frac{32(S.50°)^3}{3[B.100° - S.80°]}$$

$$\text{Log. } (\text{S.}50°)^3 = 0{,}8842540 - 1$$
$$3$$
$$0{,}6527620 - 1$$
$$\text{Log. } 32 = 1{,}5051500$$
$$\text{Log. } 32\,(\text{S.}50°)^3 = 1{,}1579120$$

$$\text{B. } 100° = 1{,}74533$$
$$\text{S. } 80° = 0{,}98481$$
$$[\text{B.}100° - \text{S.}80°] = 0{,}76052$$
$$3$$
$$3\,[\text{B.}100° - \text{S.}80°] = 2{,}28156$$

$$\text{Log. } [32\,(\text{S.}50°)^3] = 1{,}1579120$$
$$\text{Log. } [3\,(\text{B.}100° - \text{S.}80°)] = 0{,}3582319$$
$$\text{Log. CM} = 0{,}7996801, \text{ folglich CM} = 6{,}3049 \text{ Fuß.}$$

147ste Aufgabe.

Es soll die Entfernung des Schwerpunktes CM, Fig. 75, von der Fläche AEFB, welche zwischen den beiden Chorden AB und EF enthalten ist, vom Mittelpunkte C aus bestimmt werden. Der Halbmesser AC = CD sei = r = 4 Fuß; das Gradmaß des Bogens ADB = α = 120°, und des Bogens EDF = β = 80°.

Auflösung.

r = 4 Fuß.
α = 120°.
β = 80°.

$$\text{CM} = \frac{4r\,[(\text{S.}\tfrac{1}{2}\alpha)^3 - (\text{S.}\tfrac{1}{2}\beta)^3]}{3[(\text{B.}\alpha + \text{S.}\beta) - (\text{B.}\beta + \text{S.}\alpha)]}$$

$$\text{CM} = \frac{4.4.[(\text{S.}60°)^3 - (\text{S.}40°)^3]}{3.[(\text{B}\,120° + \text{S.}80) - (\text{B.}80 + \text{S.}120°)]}$$

$$\text{CM} = \frac{16\,[(\text{S.}60°)^3 - (\text{S.}40°)^3]}{3[(\text{B.}120° + \text{S.}80°) - (\text{B.}80 + \text{S.}60°)]}$$

$$\text{CM} = \frac{16\,[0{,}86602^3 - 0{,}64278^3)]}{3\,[(2{,}09439 + 0{,}98481) - (1{,}39626 + 0{,}86602)]}$$

$$\text{CM} = \frac{16\,[0{,}64951 - 0{,}26558]}{3\,[3{,}07920 - 2{,}26228]}$$

2) Bestimmung der vertikalen Entfernung des Schwerpunktes M vom Scheitelpunkte der Parabel.

$$BE = \frac{y\sqrt{(p^2+4y^2)^3} - p^3.B}{16p^2.B}$$

$$BE = \frac{6\sqrt{4^2+4.6^2)^3} - 4^3.11{,}3052}{16.4^2.11{,}3052}$$

$$BE = \frac{6.\sqrt{160^3} - 723{,}5328}{2894{,}1312}$$

$$BE = \frac{12143{,}14 - 723{,}5328}{2894{,}1312}$$

$$BE = \frac{11419{,}6092}{2894{,}1312} = 3{,}9457'.$$

3) Bestimmung der horizontalen Entfernung des Schwerpunktes M von der Axe der Parabel.

$$EM = \frac{\sqrt{(p^2+4y^2)^3} - p^3}{12.p.B.}$$

$$EM = \frac{\sqrt{(4^2+4.6^2)^3} - 4^3}{12.4.11{,}3052}$$

$$EM = \frac{\sqrt{160^3} - 64}{542{,}6496}$$

$$EM = \frac{2023{,}8574 - 64}{542{,}6496}$$

$$EM = \frac{1959{,}8574}{542{,}6496} = 3{,}6116'$$

Den Schwerpunkt ebener Flächen zu finden.

§. 56.

Der Schwerpunkt jedes Parallelogramms liegt in dem Durchschnittspunkte seiner Diagonalen, weil selbige als Durchmesser der Schwere zu betrachten sind. Die Auffindung des Schwerpunktes von einem Parallelogramm kann daher ohne weitere Rechnung geschehen.

Bestimmung des Schwerpunktes einer Dreiecksfläche.

§. 57.

Man theile die Seitenlinien des Dreiecks, Fig. 67, in zwei gleiche Theile und verbinde die Theilungspunkte mit dem gegenüberliegenden Endpunkte des Dreiecks durch die Linien AF, BD und CE, so schneiden sich selbige in dem Schwerpunkte M, und es ist sodann $DM = \frac{1}{3} BD$; $EM = \frac{1}{3} EC$ und $FM = \frac{1}{3} AF$.

Man hat daher nur eine dieser Linien z. B. BD zu ziehen und solche in drei gleiche Theile zu theilen, wo sodann der Schwerpunkt in dem Endpunkt des ersten Drittels von der Grundlinie, oder in dem des zweiten Drittels, von der Spitze aus zu liegen kommt.

Der Schwerpunkt einer Dreiecksfläche ABC, Fig. 68, kann auch auf folgende Weise gefunden werden: Man ziehe zwei Linien außerhalb des Dreiecks z. B. DE und GH, und betrachte sie als Momenten-Axen; fälle aus jedem Eckpunkte des Dreiecks Perpendikularen auf obige Linien, z. B. aus A die Perpendikularen AD und AI; aus B die Perpendikularen BF und BG u. s. w.; messe jede derselben, so giebt das Drittel der Summe der zusammengehörigen Perpendicularen die Entfernung des Schwerpunktes von der Momenten-Axe. So ist z. B. die Entfernung desselben von DE $= \frac{AD + BF + CE}{3}$ und von GH $= \frac{BG + AI + CH}{3}$.

Diese durch Rechnung gefundenen Entfernungen, trage man auf die in einem willkührlichen Punkte errichtete Perpendikulare z. B. aus D nach K, und aus G nach L, und ziehe durch K und L Parallelen mit DE und GH, so liegt der Schwerpunkt M in dem Durchschnittspunkte dieser Parallelen.

140ste Aufgabe.

Es soll zu der Dreiecksfläche ABC, Fig. 68, mittelst der gegebenen Momenten-Axen DE und GH der Schwerpunkt ge-

funden werden, wenn AD = a = 2′; BF = b = 4′ 4″; CE = c = 1′ 2″; ferner BG = b′ = 7″; AI = a′ = 3′ 4″, und CH = c′ = 1′ 2″ gefunden worden ist. Auch soll die Entfernung des Schwerpunktes M von DE mit x, und von GH mit y bezeichnet sein.

Auflösung.

Nach vorstehender Anleitung ist demnach:

a = 2′
b = 4,4′
c = 1,2′
a′ = 3,4′
b′ = 0,7′
c′ = 1,2′

$$DK = x = \frac{a+b+c}{3}$$

$$x = \frac{2'+4{,}4'+1{,}2}{3} = \frac{7{,}6}{3} = 2{,}53'$$

$$\text{und } GL = y = \frac{a'+b'+c'}{3}$$

$$y = \frac{3{,}4'+0{,}7'+1{,}2'}{3} = \frac{5{,}3}{3} = 1'76'.$$

Den Schwerpunkt der Fläche eines Trapezes durch Rechnung zu finden.

§. 58.

Man theile die gleichlaufenden Linien des Trapezes BC und AD, Fig. 69, in zwei gleiche Theile und verbinde ihre Theilungspunkte E und F durch die Linie EF, welche sodann ein Durchmesser der Schwere ist. Setzt man das Maß der längeren Parallele AD = a; der kürzeren BC = b, und die Länge der Verbindungslinie EF = c, so ist die Entfernung des Schwerpunktes M, von der längeren Parallele auf EF genommen:

$$FM = \frac{c(2b+a)}{3(a+b)}$$

und von der kürzeren Parallele BC

$$EM = \frac{c(b+2a)}{3(a+b)}$$

141ste Aufgabe.

Von dem Trapeze ABCD, Fig. 69, soll die Entfernung des Schwerpunktes von der größeren Parallele AD, das ist die Entfernung FM gefunden werden, wenn $AD = a = 4' 3''$; $BC = b = 2' 6''$, und $EF = c = 2' 2''$ beträgt.

Auflösung.

$a = 4{,}3'$
$b = 2{,}6'$
$c = 2{,}2'.$

$$FM = \frac{c(2b+a)}{3(a+b)}$$

$$FM = \frac{2{,}2\,(2.2{,}6+4{,}3)}{3\,(4{,}3+2{,}6)}$$

$$FM = \frac{2{,}2.9{,}5}{3.6{,}9}$$

$$FM = \frac{20{,}90}{20{,}7} = 1{,}01' = 1'0{,}1''.$$

Von der kleinen Parallele BC ist die Entfernung des Schwerpunktes:

$$EM = \frac{c(b+2a)}{3(a+b)}$$

$$EM = \frac{2{,}2\,(2.6+2.4{,}3)}{3\,(4{,}3+2{,}6)}$$

$$EM = \frac{2{,}2.11{,}2}{3.6{,}9}$$

$$EM = 1{,}19' = 1'1{,}9''.$$

Den allgemeinen Schwerpunkt einer jeden geradlinigen Fläche, mittelst zweier angenommenen Momenten-Axen, durch Rechnung zu bestimmen.

§. 59.

Hierbei ist folgendes Verfahren zu beobachten:

1) Man theile die geradlinige Fläche ABCDE, Fig. 70, durch Diagonalen in Dreiecke ABC, ACD, ADE, und finde nach Anleitung des 57sten §. die Schwerpunkte M, M', M''.

2) Berechne man den Flächeninhalt jedes Dreiecks nach dem der Figur zugehörigen Maßstabe.

3) Ziehe die beiden Momenten-Axen VX und VW unter einem Winkel in willkührlicher Lage; fälle aus jedem Schwerpunkte Perpendicularen auf die beiden Momenten-Axen und messe ihre Längen. Die Entfernung des allgemeinen Schwerpunktes für jede Momenten-Axe wird sodann erhalten, wenn man die Momente (d. i. die Produkte der Entfernungen in die Inhalte der Dreiecke) addirt, und diese Summe durch die Summe der Inhalte dividirt.

Es sei z. B. der Flächeninhalt des $\triangle ABC = P$
" " " " $\triangle ACD = Q$
" " " " $\triangle ADE = R$

Die Entfernungen der Schwerpunkte von der Momenten-Axe VX sind $FM = a$; $GM' = b$; $HM'' = c$, und von der Momenten-Axe VW; $IM = a'$; $LM' = b'$; $KM'' = c'$. Die Entfernung des allgemeinen Schwerpunktes N von der Momenten-Axe VX ist demnach:

$$y = \frac{aP + bQ + cR}{P + Q + R}$$

und von der Momenten-Axe VW

$$z = \frac{a'P + b'Q + c'R}{P + Q + R}$$

Man errichte nun in einem willkührlichen Punkte der Momenten-Axen die Perpendikularen $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$; trage auf erstere den gefundenen Werth von y, aus α nach β, so wie den Werth von z, aus γ nach δ und ziehe durch die Endpunkte β und δ Parallelen mit den Momenten-Axen, so zeigt der Durchschnittspunkt N, den Schwerpunkt für die Fläche ABCDE.

142ste Aufgabe.

In der irregulairen geradlinigen Figur ABCDE, Fig. 70, sei der Flächeninhalt des $\triangle ABC = P = 2{,}975\square'$; des $\triangle ACD = Q = 3{,}15\square'$; des $\triangle ADE = R = 1{,}947\square'$; ferner die Entfernung der Schwerpunkte M, M' M'' von den

Momenten-Axe VX, nämlich FM = a = 1,6′, GM′ = b = 2,6′ und HM″ = c = 2,1′ und von der Momenten-Axe VW die Entfernung IM = a′ = 3,1′; LM′ = b′ = 2,1′ und KM″ = c′ = 1,2′ gefunden worden. Wie groß ist die Entfernung des Schwerpunktes N von jeder der beiden Momenten-Axen?

Auflösung.

1) Bestimmung der Entfernung $\alpha\beta = y$ von VX.

$P = 2{,}975\square'$
$Q = 3{,}15\square'$
$R = 1{,}947\square'$
$a = 1{,}6'$
$b = 2{,}6'$
$c = 2{,}1'$
$a' = 3{,}1'$
$b' = 2{,}1'$
$c' = 1{,}2'$.

$$y = \frac{aP + bQ + cR}{P + Q + R}$$

$$y = \frac{1{,}6 \cdot 2{,}975 + 2{,}6 \cdot 3{,}15 + 2{,}1 \cdot 1{,}947}{2{,}975 + 3{,}15 + 1{,}947}$$

$$y = \frac{4{,}76 + 8{,}19 + 4{,}09}{8{,}07}$$

$$y = \frac{17{,}04}{8{,}07} = 2{,}11' = 2'\,1'\,1''.$$

2) Bestimmung der Entfernung $\gamma\delta = z$ von VW.

$$z = \frac{a'P + b'Q + c'R}{P + Q + R}$$

$$z = \frac{3{,}1 \cdot 2{,}975 + 2{,}1 \cdot 3{,}15 + 1{,}2 \cdot 1{,}947}{2{,}975 + 3{,}15 + 2{,}3364}$$

$$z = \frac{9{,}2225 + 6\,615 + 2{,}3364}{8{,}072}$$

$$z = \frac{18{,}1739}{8{,}072} = 2{,}2514' = 2'2{,}514''.$$

Den Schwerpunkt eines Kreisausschnittes zu bestimmen.

§. 60.

Wenn auf die Mitte des Bogens ADB, Fig. 71, ein Halbmesser gezogen wird, so ist selbiger ein Durchmesser der Schwere und gehet durch den Schwerpunkt M des Bogens. Kennt man das Gradmaß des Bogens ADB = α, und den

Halbmesser CA = CD = CB = r; so ist die Entfernung des Schwerpunktes M vom Mittelpunkte C des Bogens.

$$CM = \frac{4rS.\frac{1}{2}\alpha}{3B.\alpha}$$

Würde hingegen die Entfernung des Schwerpunktes vom Scheitelpunkte D des Bogens verlangt, so ist:

$$DM = r\left[1 - \frac{4S.\frac{1}{2}\alpha}{3B.\alpha}\right]$$

143ste Aufgabe.

Der Bogen ADB eines Kreisausschnitts CADBC, Fig. 71, enthalte = α = 95°, und der Halbmesser desselben AC = CD = CB = r = 4 Fuß; welche Entfernung CM hat der Schwerpunkt des Kreisausschnitts vom Mittelpunkte C?

Auflösung.

α = 95°.
r = 4 Fuß.

$$CM = \frac{4rS.\frac{1}{2}\alpha}{3B.\alpha}$$

$$CM = \frac{4.4.S.47°30'}{3B.95°}$$

$$CM = \frac{16.0{,}7372}{3.1{,}6580}$$

$$CM = \frac{11{,}7952}{4{,}9740} = 2{,}371 \text{ Fuß}.$$

Anmerk. Für den Quadranten der Kreisfläche ist die Entfernung des Schwerpunktes M vom Mittelpunkte C, CM = 0,6002.r und für die halbe Kreisfläche CM = 0,4244.r.

Den Schwerpunkt der Fläche des massiven Bogens eines Tonnengewölbes zu finden.

§. 61.

144ste Aufgabe.

Es soll die Entfernung des Schwerpunktes M vom Mittelpunkte E im Profile Fig. 72 zu der, zwischen den beiden

concentrischen Bogen ADB und EgF enthaltenen Fläche eines Tonnengewölbes gefunden werden, wenn der Halbmesser des äußeren Bogens AC = CD = CB = R = 5 Ellen und die Gewölbstärke AE = 16 Zoll, folglich der Halbmesser des inneren Bogens EC = r = 4 Ellen 8 Zoll ist, und der Bogen ADB = α = 130° beträgt.

Auflösung.

R = 5 Ellen.
r = $4\frac{1}{3}$ Elle.
α = 130°

$$CM = \frac{4S._{\frac{1}{2}\alpha}(R^3-r^3)}{3B._{\alpha}(R^2-r^2)}$$

$$CM = \frac{4.S.65°(5^3-(4\frac{1}{3})^3)}{3B.130°(5^2-(4\frac{1}{3})^2)}$$

$$CM = \frac{4.0,9063\,(125-81,3703)}{3.2,2689\,(25-18,7777)}$$

$$CM = \frac{3,6252}{6,8067} \cdot \frac{43,6297}{6,2223}$$

CM = 3,7344 Ellen = 3 Ellen 17,62 Zoll.

145ste Aufgabe.

An einem vollcirkelförmigen Tonnengewölbe, Fig. 73, sei der Halbmesser des äußern Halbkreises AC = CD = R = 4 Ellen, und der Halbmesser des inneren CE = r = 3 Ellen 12 Zoll. In welcher Entfernung vom Mittelpunkte C liegt der Schwerpunkt M?

Auflösung.

R = 4 Ellen.
r = $3\frac{1}{2}$ Elle.

$$CM = 0,4244 \cdot \left[\frac{R^3-r^3}{R^2-r^2}\right]$$

$$CM = 0,4244 \left[\frac{4^3-(3\frac{1}{2})^3}{4^2-(3\frac{1}{2})^2}\right]$$

$$CM = 0,4244 \left[\frac{64-42,875}{16-12,25}\right]$$

$$CM = \frac{0{,}4244 \cdot 21{,}125}{3{,}75}$$

$$CM = 2{,}3908 \text{ Ellen} = 2 \text{ Ellen } 9{,}3 \text{ Zoll.}$$

Anmerk. Sollte ſtatt des Halbmeſſers vom äußeren und inneren Bogen, der Halbmeſſer des mittleren Bogens KFG, das iſt: $CK = CF = CG = \varrho$ und die Stärke des Gewölbes $AE = b$ gegeben ſein, ſo wird in beiden Formeln dieſer und der vorhergehenden Aufgabe $\frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}$ zu $\frac{12\varrho^2 + b^2}{8\varrho}$ und daher hier $CM = 0{,}4244 \left[\frac{12\varrho^2 + b^2}{8\varrho}\right] = 0{,}05305 \left[\frac{12\varrho^2 + b^2}{\varrho}\right]$. Unter derſelben Bedingung wird in der 144ſten Aufgabe $CM = \frac{4S.\frac{1}{2}\alpha}{3B.\alpha}\left[\frac{12\varrho^2 + b^2}{8\varrho}\right] = \frac{S.\frac{1}{2}\alpha}{6B.\alpha}\left[\frac{12\varrho^2 + b^2}{\varrho}\right]$

Die Entfernung des Schwerpunktes eines Kreisabſchnittes zu finden.

§. 62.

146ſte Aufgabe.

Der Bogen ADB eines Kreisſegments, Fig. 74, betrage $= \alpha = 100°$, und ſein Halbmeſſer $AC = CD = CD = r = 8$ Fuß; welche Entfernung CM hat ſein Schwerpunkt M vom Mittelpunkte desſelben?

Auflöſung.

$r = 8$ Fuß.
$\alpha = 100°$.

$$CM = \frac{4r(S.\frac{1}{2}\alpha)^3}{3[B.\alpha - S.\alpha]}$$

$$CM = \frac{4.8(S.50°)^3}{3[B.100° - S.100°]}$$

$$CM = \frac{32(S.50°)^3}{3[B.100° - S.80°]}$$

$$\text{Log. } (\text{S. } 50°)^3 = 0{,}8842540 - 1$$
$$3$$
$$0{,}6527620 - 1$$
$$\text{Log. } 32 = 1{,}5051500$$
$$\text{Log. } 32\,(\text{S. } 50°)^3 = 1{,}1579120$$

$$\text{B. } 100° = 1{,}74533$$
$$\text{S. } 80° = 0{,}98481$$
$$[\text{B. } 100° - \text{S. } 80°] = 0{,}76052$$
$$3$$
$$3\,[\text{B. } 100° - \text{S. } 80°] = 2{,}28156$$

$$\text{Log. } [32\,(\text{S. } 50°)^3] = 1{,}1579120$$
$$\text{Log. } [3(\text{B. } 100° - \text{S. } 80°)] = 0{,}3582319$$
$$\text{Log. CM} = 0{,}7996801, \text{ folglich CM} = 6{,}3049 \text{ Fuß.}$$

147ste Aufgabe.

Es soll die Entfernung des Schwerpunktes CM, Fig. 75, von der Fläche AEFB, welche zwischen den beiden Chorden AB und EF enthalten ist, vom Mittelpunkte C aus bestimmt werden. Der Halbmesser $AC = CD$ sei $= r = 4$ Fuß; das Gradmaß des Bogens $ADB = \alpha = 120°$, und des Bogens $EDF = \beta = 80°$.

Auflösung.

$r = 4$ Fuß.
$\alpha = 120°$.
$\beta = 80°$.

$$CM = \frac{4r\,[(\text{S. } \tfrac{r}{2}\alpha)^3 - (\text{S. } \tfrac{r}{2}\beta)^3]}{3[(\text{B. } \alpha + \text{S. } \beta) - (\text{B. } \beta + \text{S. } \alpha)]}$$

$$CM = \frac{4.4.[(\text{S. } 60°)^3 - (\text{S. } 40°)^3]}{3.[(\text{B } 120° + \text{S. } 80°) - (\text{B. } 80° + \text{S. } 120°)]}$$

$$CM = \frac{16\,[(\text{S. } 60°)^3 - (\text{S. } 40°)^3]}{3[(\text{B. } 120° + \text{S. } 80°) - (\text{B. } 80° + \text{S. } 60°)]}$$

$$CM = \frac{16\,[0{,}86602^3 - 0{,}64278^3)]}{3\,[(2{,}09439 + 0{,}98481) - (1{,}39626 + 0{,}86602)]}$$

$$CM = \frac{16\,[0{,}64951 - 0{,}26558]}{3\,[3{,}07920 - 2{,}26228]}$$

$$CM = \frac{16.0{,}38393}{3.0{,}81692}$$

$$CM = \frac{6{,}14288}{2{,}45076} = 2{,}5065 \text{ Fuß.}$$

Die Entfernung des Schwerpunktes einer jeden symmetrisch-krummlinigen Fläche zu finden.

§. 63.

Fig. 76 sei eine dergleichen symmetrische Fläche, bei welcher die gegenüberliegenden Punkte h, h′; g, g′ ꝛc. von der Axe kl gleiche Entfernung haben. Man theile kl in eine willkührliche Anzahl, z. B. in n gleiche Theile, jedoch unter der Bedingung, daß wenn durch die Theilungspunkte k, m, p ꝛc. Chorden rechtwinkelig die Axe schneidend gezogen werden, die abgeschnittenen Theile der krummen Linie ohne merklichen Fehler als gerade Linien betrachtet werden können. Bezeichnet ferner w die Länge der Axe kl, so möge $mp = km$ ꝛc. $= \frac{w}{n} = u$ sein. Auch sind die Chorden aa′, bb′ ꝛc. auf dem der Figur zugehörigen Maßstabe zu messen; deshalb sei $aa' = a$; $bb' = b$; $cc' = c$ ꝛc. Durch vorstehende Linien ist sodann die Entfernung des Schwerpunktes M von der untersten Chorde aa′

$$lM = u \frac{\left[\frac{a+(3n-1)h}{6} + b + 2c + 3d + 4e + 5f \ldots + (n-1)g\right]}{\left(\frac{a+h}{2}\right) + b + c + d + e + f \ldots + g}$$

148ste Aufgabe.

An der symmetrisch-krummlinigen Fläche abh′a′, Fig. 76, sei die Länge der Axe $kl = w = 3{,}5'$. Dieselbe sei in n, (hier in 7) gleiche Theile getheilt, folglich ist $km = mp$ ꝛc. $= u = \frac{3{,}5}{7} = 0{,}5'$; ferner die Länge der in der Ordnung auf einander folgenden Chorden $aa' = a = 6'$; $bb' = b = 5{,}8'$; $cc = c = 5{,}5'$; $dd' = d = 5{,}2'$; $ee' = e = 4{,}6'$; $ff' = f = 3{,}9'$; $gg' = g = 31'$ und $hh' = h = 1{,}8'$; welche Entfernung hat der Schwerpunkt M von der untersten Chorde aa′?

Auflösung.

$n = 7$
$u = 0{,}5'$
$a = 6'$
$b = 5{,}8'$
$c = 5{,}5'$
$d = 5{,}2'$
$e = 4{,}6'$
$f = 3{,}9'$
$g = 3{,}1'$
$h = 1{,}8'.$

$$1M = u\left[\frac{\frac{a+(3n-1)h}{6}+b+2c+3d+4e+5f\ldots+(n-1)g}{\left(\frac{a+h}{2}\right)+b+c+d+e+f\ldots+g}\right]$$

$$1M = 0{,}5\left[\frac{\frac{6+(21-1)1{,}8}{6}+5{,}8+2.5{,}5+3.5{,}2+4.4{,}6+5.3{,}9+6.3{,}1}{\left(\frac{6+1{,}8}{2}\right)+5{,}8+5{,}5+5{,}2+4{,}6+3{,}9+3{,}1}\right]$$

$$1M = 0{,}5\left[\frac{7+5{,}8+11+15{,}6+18{,}4+19{,}5+18{,}6}{3{,}9+5{,}8+5{,}5+5{,}2+4{,}6+3{,}931}\right]$$

$$1M = \frac{0{,}5\,.\,95{,}9}{32} = 1{,}498' = 1'4{,}98''.$$

Anmerk. Sollte die krumme Linie ah und a'h' in dem Punkte k der Axe zusammen treffen, so wird in vorstehendem Ausdrucke $hh' = h$ zu Null und derselbe verwandelt sich in:

$$1M = u\,\frac{\left[\frac{a}{b}+b+2c+3d+4e+5f+\ldots(n-1)g\right]}{\frac{a}{2}+b+c+d+e+f+\ldots g}$$

Würden sich die krummen Linien ha und h'a' auch unterwärts in dem Punkte l vereinigen, so wird unter dieser Voraussetzung auch $aa' = a = 0$, und

die Entfernung des Schwerpunktes von diesem Durchschnittspunkte der Axe ist:

$$1M = u\left[\frac{b+2c+3d+4e+5f...+(n-1)g}{b+c+d+e+f...+g}\right.$$

Bestimmung des Schwerpunktes einer ganzen und halben Parabelfläche.

§. 63.

Für die ganze Parabelfläche ist die Axe BC, Fig. 77, der Durchmesser der Schwere, und in ihr liegt der Schwerpunkt F. Für die halbe Parabelfläche kommt der Schwerpunkt M seithalben der Axe zu liegen, weshalb die rechtwinkelig auf einander gezogenen Entfernungen BF und FM bestimmt werden müssen. Bezeichnet man die Abscisse BC mit x und die Entfernung des Schwerpunktes vom Scheitelpunkte BF mit z, so ist für die ganze Parabelfläche ABD die Entfernung,

$$BF = z = \tfrac{3}{4}x$$

Zur Bestimmung des Schwerpunktes M der halben Parabelfläche ABC, ist BF ebenfalls $= \frac{3}{4}x$, und wenn die rechtwinkelige Entfernung desselben von der Axe FM $= z'$ gesetzt wird, erhält man für die Entfernung

$$FM = z' = \tfrac{3}{8}\sqrt{px}$$

in welchem Ausdrucke p den Parameter der Parabel bezeichnet.

Sollte endlich statt des Parameters die Ordinate AC $= y$ gegeben sein, dann wäre:

$$FM = z' = \tfrac{3}{8}y$$

149ste Aufgabe.

Der Parameter für die Parabel ABD, Fig. 77, sei $= p = 3\frac{1}{2}$ Elle, und die Abscisse BC $= x = 5$ Ellen 8 Zoll; welche Entfernung BF $= z$ vom Scheitelpunkte B, und welche horizontale Entfernung FM $= z'$ von der Axe sind zu Bestimmung des Schwerpunktes M anzunehmen?

Auflösung.

$p = 3\frac{1}{2}$ Elle.
$x = 5\frac{1}{3}$ "

1) Bestimmung des Abstandes BF vom Scheitelpunkte B.

$$z = \tfrac{3}{5}x$$
$$z = \tfrac{3}{5}.5\tfrac{1}{3}$$
$$z = 3\tfrac{1}{5}\text{ Elle} = 3\text{ Ellen }4{,}8\text{ Zoll.}$$

2) Bestimmung des Abstandes FM von der Axe BC.

$$z' = \tfrac{3}{8}\sqrt{px}$$
$$z' = \tfrac{3}{8}\sqrt{3\tfrac{1}{2}\,.\,5\tfrac{1}{3}}$$
$$z = \tfrac{3}{8}\sqrt{18\tfrac{1}{3}}$$
$$z = 1{,}6202\text{ Ellen} = 1\text{ Elle }14{,}88\text{ Zoll.}$$

150ste Aufgabe.

An einer halben Parabelfläche sei die Abscisse BC, Fig. 77, $= x = 20$ Zoll, und die ihr zugehörige Ordinate AC $= y = 1$ Elle; welche Entfernung BF $= z$ vom Scheitelpunkte B, und welche horizontale Entfernung FM $= z'$ von der Axe, hat der Schwerpunkt M?

Auflösung.

$x = \frac{5}{6}$ Elle. $y = 1$ „

$$BF = z = \tfrac{3}{5}x$$
$$z = \tfrac{3}{5}.\tfrac{5}{6} = \tfrac{1}{2}\text{ Elle} = 12\text{ Zoll.}$$
$$FM = z' = \tfrac{3}{8}y.$$
$$z' = \tfrac{3}{8}.1$$
$$z = \tfrac{3}{8}\text{ Elle} = 9\text{ Zoll.}$$

Den Schwerpunkt einer Hyperbelfläche durch Rechnung zu finden.

§. 64.

Bei der ganzen Hyperbelfläche ist die Axe ebenfalls ein Durchmesser der Schwere. Es stelle deshalb ABC, Fig. 77, die halbe Fläche derselben vor, deren erste Axe $= 2a$, die zweite oder Zwergaxe $= 2b$, und der Anfangspunkt der Abscissen im Scheitelpunkte B der Hyperbel angenommen ist. Unter dieser Bedingung ist die Entfernung des Schwerpunktes F vom Scheitel B sowohl bei der ganzen als halben Hyperbelfläche:

$$BF = z = \frac{a^2 y^3}{3b^2 A} - a$$

wenn A die Hyperbelfläche bezeichnet. Es ist aber

$$A = \frac{b(a+x)}{2a}\sqrt{2ax+x^2} - \frac{ab}{2}\,L.\left[\frac{a+x+\sqrt{2ax+x^2}}{a}\right]$$

und die horizontale Entfernung von der Axe bei Bestimmung des Schwerpunktes einer halben Parabelfläche:

$$FM = z' = \frac{b^2(3a+x)x^2}{6a^2A}.$$

151ste Aufgabe.

Die Hyperbelfläche ABD, Fig. 77, habe zur ersten Axe $2a = 8$ Fuß; zur zweiten Axe $2b = 6$ Fuß; die Abscisse $BC = x$ sei $= 10$ Fuß; welche Entfernungen $BF = z'$ müssen angenommen werden, um den Schwerpunkt M für die halbe Hyperbelfläche zu bestimmen?

Auflösung.

$a = 4'$
$b = 3'$
$x = 10'$.

1) Berechnung der Hyperbelfläche.

$$A = b\frac{(a+x)}{2a}\sqrt{2ax+x^2} - \frac{ab}{2}L.\left[\frac{a+x+\sqrt{2ax+x^2}}{a}\right]$$

$$A = 3\left(\frac{4+10}{2.4}\right)\sqrt{2.4.10+10^2} - \frac{4.3}{2}L.\left[\frac{4+10+\sqrt{2.4.10+10^2}}{4}\right]$$

$$A = 5\tfrac{1}{4}\sqrt{180} - 6\,L.\left[\frac{14+\sqrt{180}}{4}\right]$$

(A.) $A = 5\frac{1}{4}.13{,}4164 - 6\,L.[6{,}8541]$

Log. 6,8541 =	0,8359504
Modul =	2,302585
	1,6719008
	2507851 2
	167190
	41795
	6680
	415
L. [6,8541] =	1,9248467
	6
6 L. [6,8541] =	11,5490802

Dieſen Werth in (A.) ſubſtituirt, giebt:

$$A = 5\tfrac{1}{4} . 13{,}4164 - 11{,}5491$$
$$A = 70{,}4361 - 11{,}5491$$
$$A = 58{,}887 \text{ □Fuß.}$$

2) Berechnung der Entfernung des Schwerpunktes vom Scheitelpunkte.

$$BF = z = \frac{a^2 y^3}{3b^2 A} - a$$

Um dieſe Entfernung zu berechnen, iſt zuvörderſt die Ordinate y zu beſtimmen. Dieſelbe wird durch folgende Gleichung erhalten:

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{2ax + x^2}$$
$$y = \tfrac{3}{4} \sqrt{2.4.10 + 10^2}$$
$$y = \tfrac{3}{4} \sqrt{180}$$
$$y = \tfrac{3}{4} . 13{,}4164$$
$$y = 10{,}0623';$$

daher iſt $BF = z = \frac{4^2 . 10{,}0623^3}{3 . 3^2 . 58{,}887} - 4$

$$z = 10{,}252 - 4 = 6{,}252'.$$

3) Berechnung der Entfernung des Schwerpunktes von der Axe.

$$FM = z' = \frac{b^2 (3a + x) x^2}{6a^2 A}$$
$$z' = \frac{3^2 (3.4 + 10) . 10^2}{6 . 4^2 . 58{,}887}$$
$$z' = \frac{9{,}22 . 100}{96 . 58{,}887}$$
$$z' = 3{,}5024'$$

Den Schwerpunkt der Fläche eines elliptiſchen Abſchnittes zu finden.

§. 65.

Wenn an der elliptiſchen Fläche ADBE, Fig. 78, die große Axe AB = 2a; die kleine Axe DE = 2b geſetzt und

der Anfangspunkt der Abscissen im Endpunkte D der kleinen Axe angenommen wird, so ist die Gleichung für die Ellipse:

$$y = \frac{a}{b}\sqrt{2bx - x^2}$$

ferner der Flächeninhalt ihres Abschnitts HDGH

$$A = \tfrac{1}{2}ab.B.S.\left(1-\frac{x}{b}\right) - a\left(\frac{b-x}{2b}\right)\sqrt{2bx-x^2}$$

Die Entfernung des Schwerpunktes vom Scheitelpunkte D ist sodann:

$$DF = z = b - \frac{b^2y^3}{3a^2A}$$

und die Entfernung von der kleinen Axe:

$$FM = z' = \frac{a^2(3b-x)x^2}{6b^2A}$$

152ste Aufgabe.

Der Schwerpunkt M, soll für die Fläche des elliptischen Abschnitts DGH, Fig. 78, mittelst der Entfernungen $DF = z$ vom Endpunkte D der kleinen Axe und der Entfernung von letzterer $FM = z'$ gefunden werden. Die große Axe AB sei $= 2a = 12'$; die kleine Axe $DE = 2b = 10'$ und die Abscisse DG des Abschnittes $= x = 4'$.

Auflösung.

$a = 6'$
$b = 5'$
$x = 4'$.

1) Berechnung der Ordinate GH des Abschnitts DGH.

$$y = \frac{a}{b}\sqrt{2bx - x^2}$$

$$y = \tfrac{6}{5}\sqrt{2.5.4 - 4^2}$$

$$y = \tfrac{6}{5}\sqrt{24}$$

$$y = \tfrac{6}{5}.4{,}8989$$

$$y = 5{,}8787'.$$

2) Berechnung des Flächeninhalts des elliptischen Abschnittes DGH.

$$A = \tfrac{1}{2}ab.B.S.\left(1-\frac{x}{b}\right)-\frac{a(b-x)\sqrt{2bx-x^2}}{2b}$$

$$A = \tfrac{1}{2}.6.5.B.S.\left(1-\frac{4}{5}\right)-\frac{6(5-4)\sqrt{2\,5.4-4^2}}{2.5}$$

$$A = 15.B.(S.=0,2)-\frac{6.\sqrt{24}}{10}$$

(A.) $A = 15.B.(S.=0,2)-2,9393$

Log. 0,2 = 0,3010300 — 1
+ 10

Log. S. = 0,2 = 9,3010300, hierzu gehören 78° 28′ — 13″
8953 = 78° 27′ 47″

103,12 | 1347,00 | 13″
1031 2
315 80

Dieses Gradmaß in Theile des Halbmessers = 1 verwandelt, erhält man für:

78° = 1,36135
27′ = 0,00785
47″ = 0,00023

B. (S. = 0,2) = 1,36943; durch Substitution in (A.) wird

$A = 15.1,36943-2,9393$

$A = 17,6021\ \square'$.

3) Berechnung der Entfernung des Schwerpunktes vom Endpunkte der kleinen Axe.

$$DF = z = b-\frac{b^2y^3}{3a^2A}$$

$$z = 5-\frac{5^2.5,8787^3}{3.6^2.17,6021}$$

$$z = 5-\frac{25.5,8787^3}{108.17,6021}$$

$$z = 5-2,6717$$

$z = 2,3283'$.

4) Berechnung der Entfernung des Schwerpunktes von der kleinen Axe DE.

$$FM = z' = \frac{a^2(3b-x)x^2}{6b^2A}$$

$$z' = \frac{6^2(3.5-4)4^2}{6.5^2.17,6021}$$

$$z' = \frac{36.11.16}{150.17,6021}$$

$$z' = 2,3997'.$$

153ste Aufgabe.

Der Schwerpunkt der halben elliptischen Fläche ADE, Fig. 78, liegt in der kleinen Axe DE.

Es soll mit Beibehaltung der Dimensionen vorhergehender Aufgabe, die Entfernung des Schwerpunktes vom Endpunkte D der kleinen Axe gefunden werden.

Auflösung.

$a = 6'$

$b = 5'.$

Der Flächeninhalt der halben Ellipse ist, wenn die große Axe $= 2a$ und die kleine $= 2b$ gesetzt wird:

$$A = 0,7854.a.b$$

$$A = 0,7854.6.5.$$

$$A = 23,562$$

und die Entfernung des Schwerpunktes vom Endpunkte D der kleinen Axe

$$z = b - \frac{ab^2}{3.0,7854.ab}$$

$$z = b - \frac{b}{3.0,7854}$$

$$z = b\left[1 - \frac{1}{2,3562}\right]$$

$$z = b\left[\frac{1,3562}{2,3562}\right]$$

$$z = 0,5755.b$$

$$z = 0,5755.5 = 2,8775'$$

154ste Aufgabe.

Die Entfernungen des Schwerpunktes vom Endpunkte D der kleinen Axe DF = z und die Entfernung FM = z′ soll unter vorhergehenden Bedingungen für den Quadranten der Ellipse bestimmt werden.

Auflösung.

a = 6′

b = 5′.

Die Entfernung des Schwerpunktes vom Endpunkte D der kleinen Axe ist wie in vorhergehender Aufgabe

$$DF = z = 0{,}5755 . b$$

$$z = 0{,}5755 . 5 = 2{,}877'.$$

Die Entfernung FM von der kleinen Axe ist:

$$z' = 0{,}4244 . a$$

$$z' = 0{,}4244 . 6 = 2{,}5464'.$$

Bestimmung des Schwerpunktes der Durchschnittsfläche eines elliptischen Gewölbes.

§. 66.

In Fig. 79 sei ADBbda der massive Theil eines elliptischen Gewölbes von gleicher Stärke vor. Die Mittelpunkte beider Ellipsen fallen in C zusammen. Die halbe große Axe der äußeren Ellipse AC = CB sei A; die der inneren aC = Cc = a, die halbe kleine Axe der äußeren Ellipse CD = B, die der inneren Cd = b; sodann ist die Entfernung des Schwerpunktes M vom Mittelpunkte C, das ist:

$$CM = 0{,}4244 . \frac{A.B^2 - a.b^2}{A.B - ab}$$

155ste Aufgabe.

An einem materiellen elliptisch geformten Gewölbbogen, Fig. 79, sei die halbe große Axe der äußeren Ellipse AC = CA = A = 6 Ellen; die halbe große Axe der inneren aC = Cb = a = 5 Ellen 12 Zoll, die halbe kleine Axe der äußern Ellipse = CD = B = 4 Ellen, und die halbe kleine

Axe der inneren Cd = b = 3 Ellen 12 Zoll. Welche Entfernung hat der Schwerpunkt M vom Mittelpunkte C?

Auflösung.

A = 6 Ellen.
a = $5\frac{1}{2}$ Elle.
B = 4 Ellen.
b = $3\frac{1}{2}$ Elle.

$$CM = 0{,}4244 \cdot \frac{AB^2 - ab^2}{AB - ab}$$

$$CM = 0{,}4244 \cdot \frac{6.4^2 - 5\frac{1}{2}.(3\frac{1}{2})^2}{6.4 - 5\frac{1}{2}.3\frac{1}{2}}$$

$$CM = 0{,}4244 \cdot \frac{96 - 67\frac{3}{8}}{24 - 19\frac{1}{4}}$$

$$CM = 0{,}4244 \cdot \frac{28{,}625}{4{,}75}$$

CM = 2,5575 Ellen = 2 Ellen 13,38 Zoll.

Die Entfernung des Schwerpunktes, von der Fläche eines Cykloidenabschnitts zu bestimmen.

§. 67.

An der Cykloide ADB, Fig. 80, sei FDG die Fläche eines Abschnitts, von welchem DC ein Durchmesser der Schwere ist. Der Halbmesser des Erzeugungskreises sei = r, und die Abscisse des Abschnitts DE = x. Mittelst dieser Größen erhält man die Entfernung des Schwerpunktes M vom Scheitel D.

$$DM = \frac{3r(2x^2 - r^2)\text{B.S.}\left(1 - \frac{x}{r}\right) + (3r^2 + rx + 4x^2)\sqrt{2rx - x^2}}{6r(2x - r)\text{B.S.}\left(1 - \frac{x}{r}\right) + 6(r + x)\sqrt{2rx - x^2}}$$

156ste Aufgabe.

Der Halbmesser des beschreibenden Kreises sei = r = 8′; die Abscisse DE des Flächenabschnitts der Cykloide FDG = x = 4′; welche Entfernung hat der Schwerpunkt M vom Scheitelpunkt D?

Auflösung.

$r = 8'.$
$x = 4'.$

$$DM = \frac{3r(2x^2-r^2)\text{B.S.}\left(1-\frac{x}{r}\right)+(3r^2+rx+4x^2)\sqrt{2rx-x^2}}{6r(2x-r)\text{B.S.}\left(1-\frac{x}{r}\right)+6(r+x)\sqrt{2rx-x^2}}$$

$$DM = \frac{3.8(2.4^2-8^2)\text{B.S.}\left(1-\frac{4}{8}\right)+(3.8^2+8.4+4.4^2\sqrt{2.8.4-4^2}}{6.8(2.4-8)\text{B.S.}\left(1-\frac{4}{8}\right)+6(8+4)\sqrt{2.8.4-4^2}}$$

$$DM = \frac{-768\,\text{B.S.}\,0{,}5+(192+32+64)\sqrt{64-16}}{0+6(8+4)\sqrt{64-16}}$$

$$DM = \frac{-768.\text{B.S.}\,0{,}5+288\sqrt{48}}{72\sqrt{48}}$$

$$(A.)\quad DM = \frac{-768.\text{B.S.}\,0{,}5+1995{,}3216}{498{,}8304}$$

Nun ist Log. $0{,}5 = 0{,}6989700 - 1$
10
Log. S. $0{,}5 = 9{,}6989700$, hierzu gehören $60°$ und
B.S. $0{,}5 = \text{B.}\,60° = 1{,}04719$.

Diesen Werth in (A.) substituirt, erhält man:

$$DM = \frac{-768.1{,}04719+1995{,}3222}{498{,}8304}$$

$$DM = \frac{1191{,}0801}{498{,}8304}$$

$$DM = 2{,}3822'.$$

Anmerk. Die Entfernung des Schwerpunktes einer ganzen Cykloidenfläche vom Scheitelpunkte D an gerechnet ist:

$DM = \frac{2}{3}r$, daher in dieser Aufgabe
$DM = \frac{2}{3}.8 = 5\frac{1}{3}'$.

Bestimmung des Schwerpunktes von Körpern.

§. 68.

Wenn man den Durchschnitt eines Körpers ABC, Fig. 81, durch nahe liegende gleichlaufende Linien in Theile zerlegt, und die Linie BD halbirt sämmtliche Theilungslinien, so ist BD ein Durchmesser der Schwere für diese Durchschnittsfläche. Findet solches bei einem Körper, in Hinsicht dieser gleichlaufenden Linien, nach allen Richtungen statt, so ist BD ein Durchmesser der Schwere von diesem Körper.

Deshalb fällt der Schwerpunkt einer Kugel in ihren Mittelpunkt; bei einem Cylinder, in die Mitte seiner Axe; bei jedem Prisma in die Mitte der Linie, welche die Schwerpunkte der obern und unteren Fläche verbindet.

Weil nun bereits die Auffindung des Schwerpunktes von geraden und krummlinigen Flächen gezeigt worden ist, so bedarf es zu Bestimmung desselben, bei prismatischen Körpern keiner rechnenden Beispiele.

Den Schwerpunkt einer geradstehenden dreiseitigen Pyramide zu finden.

§. 69.

Wenn man eine Seitenlinie der Grundfläche ABC, Fig. 82, z. B. AC in zwei gleiche Theile theilt, und aus der gegenüberliegenden Spitze B die Linie BD nach dem Theilungspunkte D ziehet, so ist selbige ein Durchmesser der Schwere vom Dreiecke ABC, und der Schwerpunkt M′ liegt im Endpunkt des ersten Drittels DM′ von der Grundlinie AC aus.

Man verbinde ferner die Spitze E der Pyramide mit dem Schwerpunkte M′ durch die Linie EM′ als den Durchmesser der Schwere für die Pyramide ABCE, wo erwiesen werden kann, daß der Schwerpunkt M der letzteren im Theilungspunkte des ersten Viertels M′M von der Grundfläche aus zu liegen kommt.

Auf dieselbe Weise ist der Schwerpunkt einer jeden geradstehenden Pyramide oder eines Kegels zu bestimmen, wenn man den Schwerpunkt der Grundfläche nach Maßgabe ihrer Figur mit Hülfe der vorhergegangenen Anleitungen findet; sodann die Spitze der Pyramide mit letzteren durch eine Linie verbindet und den Schwerpunkt in dem Theilungspunkte des untersten Viertels annimmt.

Soll endlich die Entfernung des Schwerpunktes einer in schiefer Lage gegebenen Pyramide ABCD, Fig. 83, von einer Ebene EFGH aus gefunden werden, so messe man die Abstände der Ecken von dieser Ebene und nehme den vierten Theil der Summe als die Entfernung des Schwerpunktes M' an. Wäre z. B. die Entfernung Bb = b; Cc = c; Dd = d und Aa = a, so ist

$$mM = \frac{a+b+c+d}{4}$$

Die Entfernung des Schwerpunktes einer geradstehenden abgekürzten Pyramide von der Grundfläche aus zu bestimmen.

§. 70.

Hierzu ist die Länge zweier gleichliegender Seitenlinien der Ober- und Grundfläche, so wie die Höhe der abgekürzten Pyramide zu wissen nothwendig. Deshalb möge in Fig. 84 BH = A, CF = a und die Höhe KL = h sein. Die Entfernung des Schwerpunktes von der Grundfläche ist sodann:

$$LM = \frac{h}{4} \cdot \frac{A^2+2aA+3a^2}{A^2+aA+a^2}$$

157ste Aufgabe.

An der abgekürzten Pyramide, Fig. 84, sei die Seitenlinie BH = A = 3 Ellen 12 Zoll; die gleichliegende Seitenlinie CF = a = 1 Elle 16 Zoll; die Höhe KL = h = 6 Ellen. Welche Entfernung hat der Schwerpunkt M von der Grundfläche?

sciſſe des Konoid's = x = 3 Fuß 6 Zoll; welche Entfernung = z hat der Schwerpunkt M vom Scheitel des Konoid's?

Auflöſung.

$a = 4\frac{2}{3}$ Fuß.
$x = 3\frac{1}{2}$ "

$$z = \frac{8a + 3x}{12a + 4x} \cdot x$$

$$z = \frac{8.4\frac{2}{3} + 3.3\frac{1}{2}}{12.4\frac{2}{3} + 4.3\frac{1}{2}} \cdot 3\frac{1}{2}$$

$$z = \frac{37\frac{1}{3} + 10\frac{1}{2}}{56 + 14} \cdot 3\frac{1}{2}$$

$$z = \frac{47\frac{5}{6}}{70} \cdot 3\frac{1}{2}$$

$$z = 2{,}3916 \text{ Fuß.}$$

Beſtimmung des Schwerpunktes eines elliptiſchen Konoid's.

§. 81.

171ſte Aufgabe.

Ein Konoid iſt mit dem Bogen einer Ellipſe beſchrieben, deren große Axe = a = 3 Ellen beträgt. Die Höhe oder Abſciſſe des Konoids ſei = x = 2 Ellen, auch iſt der Anfangspunkt der großen Axe, zum Anfangspunkte der Abſciſſen angenommen. Welche Entfernung z hat der Schwerpunkt M von letzteren?

Auflöſung.

$a = 3$ Ellen.
$x = 2$ "

$$z = \frac{8a - 3x}{12a - 4x} \cdot x$$

$$z = \frac{8.3 - 3.2}{12.3 - 4.2} \cdot 2$$

$$z = \frac{24 - 6}{36 - 8} \cdot 2$$

$$z = \frac{18.2}{28} = 1\frac{2}{7} \text{ Ellen} = 1 \text{ Elle } 6{,}85 \text{ Zoll.}$$

Anmerk. Für einen Konoid, welcher mit dem Bogen eines Quadranten der Ellipſe um die halbe große Axe be-

schrieben ist, beträgt die Entfernung des Schwerpunktes vom Scheitelpunkte desselben

$$z = \frac{5}{8} \cdot a$$

172ste Aufgabe.

Es soll die Entfernung z des Schwerpunktes M eines elliptischen Konoid's vom Endpunkte der kleinen Axe gefunden werden, wenn letzterer zum Anfangspunkte der Abscissen angenommen wird. Die halbe kleine Axe sei $= b = 2$ Ellen 16 Zoll, und die Abscisse des Konoids $= x = 1$ Elle 8 Zoll.

Auflösung.

$b = 2\frac{2}{3}$ Elle.
$x = 1\frac{1}{3}$ „

$$z = \frac{8b - 3x}{12b - 4x} \cdot x$$

$$z = \frac{8 \cdot 2\frac{2}{3} - 3 \cdot 1\frac{1}{3}}{12 \cdot 2\frac{2}{3} - 4 \cdot 1\frac{1}{3}} \cdot 1\frac{1}{3}$$

$$z = \frac{21\frac{1}{3} - 4}{32 - 5\frac{1}{3}} \cdot 1\frac{1}{3}$$

$$z = \frac{17\frac{1}{3}}{26\frac{2}{3}} \cdot 1\frac{1}{3}$$

$z = \frac{13}{25}$ Elle $= 20{,}8$ Zoll.

Anmerk. Der Schwerpunkt eines elliptischen Konoid's, welcher mit dem Quadranten einer Ellipse um die halbe kleine Axe beschrieben ist, liegt ebenfalls im fünften Achtel vom Scheitelpunkte desselben.

Den Schwerpunkt eines Körpers, der durch Umdrehung einer beliebigen krummen Linie, um eine Axe entstanden ist, zu bestimmen.

§. 82.

In Fig. 93 möge die krummlinige Fläche AA"B"C"D"E" F"G"H"H sich um die Axe AH bewegen. Letztere sei in eine willkührliche Anzahl gleicher Theile AB = BC = CD ꝛc. = m getheilt und durch die Punkte A, B, C, D ꝛc. Linien

rechtwinkelig gelegt, so beschreiben selbige bei ihrer Umdrehung Kreisflächen.

Man bezeichne die Halbmesser AA″ mit a; BB′ mit b ꝛc. und den Inhalt des durch die Umdrehung entstandenen Körpers = Q, so ist:

$$Q = 0{,}2618\,m\,[a^2 + 4b^2 + 2c^2 + 4d^2 + 2e^2 + 4f^2 + 2g^2 + h^2]$$

und AM = z als der Abstand des Schwerpunktes M von der ersten senkrecht auf der Axe stehenden Fläche A′AA″

$$z = m\left[\frac{1{,}4b^2 + 2{,}2c^2 + 3{,}4d^2 + 4{,}2e^2 + 5{,}4f^2 + 6{,}2g^2 + 7h^2}{a^2 + 4b^2 + 2c^2 + 4d^2 + 2e^2 + 4f^2 + 2g^2 + h^2}\right]$$

173ste Aufgabe.

Die Axe AH eines Körpers, Fig. 93, sei u = 14 Ellen; dieselbe werde in n (hier in 7) gleiche Theile getheilt; so ist $\frac{u}{n} = m = 2$ Ellen. Die auf einander folgenden Halbmesser mögen nachstehende Längen haben: AA′ = a = 3 Ellen; BB′ = b = 3 Ellen 4 Zoll; CC′ = c = 3 Ellen 6 Zoll; DD′ = d = 3 Ellen 8 Zoll; EE′ = e = 3 Ellen 6 Zoll; FF′ = f = 3 Ellen 4 Zoll, GG′ = g = 3 Ellen 2 Zoll und HH′ = h = 3 Ellen. Welche Entfernung z hat der Schwerpunkt M von dem ersten senkrechten Schnitte A′A″?

Auflösung.

a = 3 Ellen.
b = $3\frac{1}{3}$ Elle.
c = $3\frac{1}{4}$ "
d = $3\frac{1}{5}$ "
e = $3\frac{1}{6}$ "
f = $3\frac{1}{7}$ "
g = $3\frac{1}{12}$ "
h = 3 "
m = 2 "

$$z = m\left[\frac{1{,}4b^2 + 2{,}2c^2 + 3{,}4d^2 + 4{,}2e^2 + 5{,}4f^2 + 6{,}2g^2 + 7h^2}{a^2 + 4b^2 + 2c^2 + 4d^2 + 2e^2 + 4f^2 + 2g^2 + h^2}\right]$$

$$z = 2\left[\frac{4(3\frac{1}{7})^2 + 4(3\frac{1}{4})^2 + 12(3\frac{1}{3})^2 + 8(3\frac{1}{4})^2 + 20(3\frac{1}{7})^2 + 12(3\frac{1}{12})^2 + 7 \cdot 3^2}{3^2 + 4(3\frac{1}{6})^2 + 2(3\frac{1}{4})^2 + 4(3\frac{1}{3})^2 + 2(3\frac{1}{4})^2 + 4(3\frac{1}{6})^2 + 2(3\frac{5}{12})^2 + 3^2}\right]$$

$$z = 2\left[\frac{40{,}1111 + 42{,}2500 + 133{,}3333 + 84{,}5000 + 200{,}5555}{9 + 40{,}1111 + 21{,}125 + 44{,}4444 + 21{,}125 + 40{,}1111 + 114{,}0833 + 63 + 19{,}0139 + 9}\right]$$

$$z = \frac{2.677{,}8332}{203{,}9305}$$

$$z = \frac{1355{,}6664}{203{,}9365.} = 6{,}6476 \text{ Ellen} = 6 \text{ Ellen } 15{,}5424 \text{ Zoll.}$$

Dritter Abschnitt.

Auflösungen

einiger der vorzüglichsten allgemeinen Ausdrücke zu Auffindung des Größten und Kleinsten in Beziehung auf Raumgrößen.

§. 83.

174ste Aufgabe.

Der körperliche Inhalt eines geradstehenden Cylinders sei gegeben und $= A = 40$ Kubikfuß; welchen Halbmesser $= r$, und welche Höhe $= h$ muß selbiger erhalten, damit die kleinste Außenfläche $= B$ obigen gegebenen körperlichen Inhalt umschließt und wie groß ist diese Außenfläche?

Auflösung.

$A = 40^{c'}$.

1) Für den Halbmesser.

$$r = 0{,}5419 \sqrt[3]{A}$$

$$r = 0{,}5419 \sqrt[5]{A}$$

$$r = 0{,}5419 . 3{,}4199$$

$$r = 1{,}8532' = 1'8{,}532''.$$

2) Für die Höhe des Cylinders.

$$h = 1{,}0838 \sqrt[3]{A}$$

$$h = 1{,}0838 \sqrt[3]{40}$$

$$h = 1{,}0838 . 3{,}4199$$

$$h = 3{,}7065' = 3'\,7{,}065''.$$

3) Die durch die so eben berechneten Dimensionen entstehende Außenfläche des Cylinders ist:

$$B = 5.5358 \sqrt[3]{A^2}$$

$$B = 5{,}5358 \sqrt[3]{40^2}$$

$$B = 5{,}5358 . 11{,}6960$$

$$B = 64{,}747 \square\text{Fuß}.$$

175ste Aufgabe.

Die Außenfläche eines Cylinders sei $B = 100$ □Fuß, welcher Halbmesser $= r$ und welche Höhe $= h$ müssen für denselben angenommen werden, um den größten körperlichen Inhalt A zu umschließen, und wie groß ist letzterer?

Auflösung.

$B = 100$ □Fuß.

1) Berechnung des Halbmessers der Grundfläche.

$$r = 0{,}2303 \sqrt{B}$$

$$r = 0{,}2303 . \sqrt{100}$$

$$r = 0{,}2303 . 10$$

$$r = 2{,}303 \text{ Fuß}.$$

2) Berechnung der Höhe des Cylinders $= h$.

$$h = 0{,}4606 \sqrt{B}$$

$$h = 0{,}4606 \sqrt{100}$$

$$h = 0{,}4606 . 10$$

$$h = 4{,}606 \text{ Fuß}.$$

3) Berechnung des größten körperlichen Inhaltes unter vorstehenden Bedingungen.

$$A = 0{,}0768\,B\sqrt{B}$$
$$A = 0{,}0768.100\sqrt{100}$$
$$A = 0{,}0768.100.10$$
$$A = 76{,}8 \text{ Kubikfuß.}$$

176ste Aufgabe.

Die Außenfläche eines geradstehenden Kegels sei $= B = 36\square'$; welchen Halbmesser $= r$ und welche Höhe $= h$ muß dieser Kegel erhalten, damit sein körperlicher Inhalt A ein Maximum werde, und wie viel Kubikfuß enthält letzterer?

Auflösung.

$B = 36\square'$.

1) Berechnung des Halbmessers der Grundfläche des Kegels.

$$r = 0{,}2821\sqrt{B}$$
$$r = 0{,}2821\sqrt{36}$$
$$r = 0{,}2821.6$$
$$r = 1{,}6926'.$$

2) Berechnung der Höhe desselben.

$$h = 0{,}7978\sqrt{B}$$
$$h = 0{,}7978\sqrt{36}$$
$$h = 0{,}7978.6$$
$$h = 4{,}7868^{c'}.$$

3) Berechnung des größten körperlichen Inhaltes zu der gegebenen Außenfläche.

$$A = 0{,}0665\,B\sqrt{B}$$
$$A = 0{,}0665.36.\sqrt{36}$$
$$A = 0{,}0665.36.6$$
$$A = 14{,}364^{c'}.$$

177ste Aufgabe.

Welches ist die kleinste Außenfläche eines geradstehenden Kegels = B für den gegebenen körperlichen Inhalt = A = 72 Kubikfuß?

Auflösung.

$A = 72^c$.

$$B = 6{,}0929 \sqrt[5]{A^2}$$

$$B = 6{,}0929 \sqrt[5]{72^2}$$

$$B = 6{,}0929 \sqrt[5]{5184}$$

$$B = 6{,}0929 . 17{,}307$$

$$B = 105{,}449 \square'.$$

178ste Aufgabe.

Wenn der Mantel, das ist die Seitenfläche eines geradstehenden Kegels, = B = 60 □Fuß gegeben ist; welches ist das Maximum des körperlichen Inhaltes, = A, und wie groß ist der Halbmesser r der Grundfläche und die Höhe h des Kegels anzunehmen?

Auflösung.

$B = 60 \square'$.

1) Berechnung des größten körperlichen Inhaltes für B.

$$A = 0{,}1166\, B \sqrt{B}$$

$$A = 0{,}1166 . 60 . \sqrt{60}$$

$$A = 0{,}1166 . 60 . 7{,}7459$$

$$A = 54{,}1908 \text{ Kubikfuß.}$$

2) Berechnung des Halbmessers der Grundfläche.

$$r = 0{,}4286 \sqrt{B}$$

$$r = 0{,}4286 \sqrt{60}$$

$$r = 0{,}4286 . 7{,}7459$$

$$r = 3{,}3199'.$$

3) Berechnung der Höhe des Kegels.

$$h = 0{,}6062 \sqrt{B}$$

$$h = 0{,}6062 \sqrt{60^{\circ}}$$

$$h = 0{,}6062 \,.\, 7{,}7459$$

$$h = 4{,}6956 \text{ Fuß.}$$

179ste Aufgabe.

Welches ist die kleinste Mantel- oder Seitenfläche B für den körperlichen Inhalt eines geradstehenden Kegels $= A =$ 50 Kubikfuß, und wie groß ist der Halbmesser der Grundfläche $= r$, und die Höhe des Kegels $= h$ anzunehmen?

Auflösung.

$A = 50^{c'}$.

1) Berechnung der Mantelfläche.

$$B = 4{,}1881 \sqrt[3]{A^2}$$

$$B = 4{,}1881 \sqrt[3]{50^2}$$

$$B = 4{,}1881 \sqrt[3]{2500}$$

$$B = 4{,}1881 \,.\, 13{,}5720$$

$$B = 56{,}841 \square\text{Fuß.}$$

2) Berechnung des Halbmessers der Grundfläche.

$$r = 0{,}8773 \sqrt[3]{A}$$

$$r = 0{,}8773 \sqrt[3]{50}$$

$$r = 0{,}8773 \sqrt[3]{50} = 3{,}232 \text{ Fuß.}$$

3) Berechnung der Höhe des Kegels.

$$h = 1{,}2407 \sqrt[3]{A}$$

$$h = 1{,}2407 \sqrt[3]{50}$$

$$h = 1{,}2407 \sqrt[3]{50}$$

$$h = 1{,}2407 \,.\, 3{,}6843$$

$$h = 4{,}571 \text{ Fuß.}$$

180ste Aufgabe.

Der Halbmesser AH eines Kegels, Fig. 94, sei = R = 8′, und dessen Höhe HB = H = 12′. Es soll in selbigen ein Cylinder DEFG eingezeichnet werden, welcher den größtmöglichsten körperlichen Inhalt haben soll; wie groß ist sein Halbmesser DH = r, und seine Höhe KH = h anzunehmen?

Auflösung.

1) Berechnung des Halbmessers vom Cylinder.

R = 8′
H = 12′.

$$r = \frac{2}{3} R$$
$$r = \frac{2}{3} . 8 = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}'.$$

2) Berechnung der Höhe desselben.

$$h = \frac{1}{3} H$$
$$h = \frac{1}{3} . 12 = 4'.$$

Anmerk. Unter vorstehender Bedingung ist der Cylinder $\frac{4}{9}$ des Kegels.

181ste Aufgabe.

In dem Raume des Kegels BCA, Fig. 94, dessen Halbmesser AH = R = 3 Ellen, und die Höhe AH = H = 10 Ellen beträgt, soll ein Cylinder beschrieben werden, dessen Außenflächen das Maximum erreichen. Wie groß ist der Halbmesser der Grundfläche = HD = r und seine Höhe KH = h anzunehmen?

Auflösung.

1) Berechnung des Halbmessers des Cylinders.

R = 3 Ellen.
H = 10 „

$$r = \frac{HR}{2(H-R)}$$
$$r = \frac{10.3}{2(10-3)}$$
$$r = 2\frac{1}{7} \text{ Elle} = 2 \text{ Ellen } 3\frac{3}{7} \text{ Zoll.}$$

2) Berechnung der Höhe desselben.

$$h = \frac{H(H-2R)}{2(H-R)}$$

$$h = \frac{10.(10-2.3)}{2(10-3)}$$

$h = 2\frac{9}{7}$ Elle $= 2$ Ellen $20\frac{4}{7}$ Zoll.

Anmerk. Sollte der Mantel, das ist die Seitenfläche des Kegels, ein Maximum werden, so ist unter dieser Bedingung $r = \frac{1}{2} R$, und $h = \frac{1}{2} H$ anzunehmen.

182ste Aufgabe.

Es sei Fig. 95 ein abgekürzter Kegel ACDB, dessen größter Halbmesser $AM = R = 3$ Ellen; der kleinere Halbmesser $KC = r = 1$ Elle 16 Zoll, und die Höhe $KM = H = 4$ Ellen ist. Man soll in selbigem einen Cylinder beschreiben, welcher den größten Inhalt A hat. Wie groß ist dessen Halbmesser $MG = \varrho$ und seine Höhe $LM = h$ anzunehmen?

Auflösung.

1) Berechnung des Halbmessers.

$R = 3$ Ellen.
$r = 1\frac{2}{3}$ Elle.
$H = 4$ Ellen.

$$\varrho = \frac{2}{3} R$$
$$\varrho = \frac{2}{3}.3 = 2 \text{ Ellen.}$$

2) Berechnung der Höhe des Cylinders.

$$h = \frac{HR}{3(R-r)}$$
$$h = \frac{4.3}{3(3-1\frac{2}{3})}$$
$$h = \frac{12}{3.1\frac{1}{3}} = \frac{12}{4} = 3 \text{ Ellen.}$$

Das Maximum von dem Cylinder ist demnach:

$$A = 3{,}1416 . \varrho^2 h$$
$$A = 3{,}1416 . 2^2 . 3$$
$A = 37{,}6992$ K. Ellen $= 37$ K. E. 9665,7 K. Zoll.

Anmerk. Es kann hier nur ein Maximum stattfinden, wenn $r < \frac{2}{3} R$ ist.

183ste Aufgabe.

In dem abgekürzten Kegel ACDB, Fig. 95, dessen größerer Halbmesser AM = R = 4 Ellen; der kleinere Halbmesser CK = r = 1 Elle 16 Zoll und die Höhe KM = H = 5 Ellen ist, soll ein Cylinder eingeschrieben werden, dessen Seitenfläche die größtmöglichste ist. Welchen Halbmesser MG = ϱ, und welche Höhe LM = h muß der Cylinder erhalten?

Auflösung.

1) Berechnung des Halbmessers.

R = 4 Ellen.
r = $1\frac{2}{3}$ Elle.
H = 5 Ellen.

$$\varrho = \tfrac{1}{2} R$$
$$\varrho = \tfrac{1}{2} . 4 = 2 \text{ Ellen.}$$

2) Berechnung der Höhe des Cylinders.

$$h = \frac{H . R}{2(R-r)}$$
$$h = \frac{5 . 4}{2(4-1\frac{2}{3})}$$
$$h = \frac{20}{4\frac{2}{3}} = 4\tfrac{2}{7} \text{ Elle} = 4 \text{ Ellen } 6\tfrac{6}{7} \text{ Zoll.}$$

Anmerk. Wenn unter vorstehender Bedingung ein Maximum der Seitenfläche stattfinden soll, so muß r < $\frac{1}{2}$ R sein.

184ste Aufgabe.

Der abgekürzte Kegel ACDB, Fig. 95, sei gegeben, dessen größerer Halbmesser AM = R = 2 Ellen; der kleinere CK = r = 20 Zoll, und seine Höhe KM = H = 3 Ellen ist. Es soll in selbigem ein Cylinder eingeschrieben werden, wovon die Außenflächen ein Größtes sind. Welchen Halbmesser GM = ϱ, und welche Höhe ML = h muß der Cylinder erhalten?

Auflösung.

1) Berechnung des Halbmessers.

$R = 2$ Ellen.
$r = \frac{5}{8}$ Elle.
$H = 3$ Ellen.

$$\varrho = \frac{HR}{2(H+r-R)}$$

$$\varrho = \frac{3.2}{2\left(3+\frac{5}{8}-2\right)}$$

$$\varrho = \frac{6}{2.1\frac{5}{8}} = 1\tfrac{7}{11}\text{ Elle} = 1\text{ E. }15\tfrac{3}{11}\text{ Z.}$$

2) Berechnung der Höhe des Cylinders.

$$h = \frac{HR}{(R-r)} \cdot \frac{(H+2r-2R)}{(2H+2r-2R)}$$

$$h = \frac{3.2}{\left(2-\frac{5}{8}\right)} \cdot \frac{\left(3+2.\frac{5}{8}-2.2\right)}{\left(2.3+2.\frac{5}{8}-2.2\right)}$$

$$h = \frac{6}{1\frac{5}{8}} \cdot \frac{\frac{2}{3}}{3\frac{2}{3}} = 0{,}935\text{ Ell.} = 22{,}44\text{ Zoll.}$$

185ste Aufgabe.

In den Kegel ACB, Fig. 96, dessen Halbmesser $AD = R = 1$ Fuß, und die Höhe $DC = H = 4$ Fuß ist, soll ein auf seiner Spitze stehender Kegel EDF, welcher die größte Seitenfläche hat, eingeschrieben werden; wie groß ist sein Halbmesser $EG = r$, und seine Höhe $DG = h$ anzunehmen?

Auflösung.

1) Berechnung des Halbmessers.

$R = 1'$
$H = 4'$

$$r = \tfrac{1}{4} H \cdot \frac{R\left[3H \pm \sqrt{H^2 - 8R^2}\right]}{(R^2+H^2)}$$

$$r = \tfrac{1}{4}.4.\frac{1.\left[3.4 \pm \sqrt{4^2 - 8.1^2}\right]}{(1^2+4^2)}.$$

$$r = \frac{12 \pm \sqrt{8}}{17}$$

183ste Aufgabe.

In dem abgekürzten Kegel ACDB, Fig. 95, dessen größerer Halbmesser $AM = R = 4$ Ellen; der kleinere Halbmesser $CK = r = 1$ Elle 16 Zoll und die Höhe $KM = H = 5$ Ellen ist, soll ein Cylinder eingeschrieben werden, dessen Seitenfläche die größtmöglichste ist. Welchen Halbmesser $MG = \varrho$, und welche Höhe $LM = h$ muß der Cylinder erhalten?

Auflösung.

1) Berechnung des Halbmessers.

$R = 4$ Ellen.
$r = 1\frac{2}{3}$ Elle.
$H = 5$ Ellen.

$$\varrho = \tfrac{1}{2} R$$
$$\varrho = \tfrac{1}{2} . 4 = 2 \text{ Ellen.}$$

2) Berechnung der Höhe des Cylinders.

$$h = \frac{H . R}{2(R - r)}$$
$$h = \frac{5 . 4}{2(4 - 1\frac{2}{3})}$$
$$h = \frac{20}{4\frac{2}{3}} = 4\tfrac{2}{7} \text{ Elle} = 4 \text{ Ellen } 6\tfrac{6}{7} \text{ Zoll.}$$

Anmerk. Wenn unter vorstehender Bedingung ein Maximum der Seitenfläche stattfinden soll, so muß $r < \frac{1}{2} R$ sein.

184ste Aufgabe.

Der abgekürzte Kegel ACDB, Fig. 95, sei gegeben, dessen größerer Halbmesser $AM = R = 2$ Ellen; der kleinere $CK = r = 20$ Zoll, und seine Höhe $KM = H = 3$ Ellen ist. Es soll in selbigem ein Cylinder eingeschrieben werden, wovon die Außenflächen ein Größtes sind. Welchen Halbmesser $GM = \varrho$, und welche Höhe $ML = h$ muß der Cylinder erhalten?

Auflösung.

1) Berechnung des Halbmessers.

$R = 2$ Ellen.
$r = \frac{5}{8}$ Elle.
$H = 3$ Ellen.

$$\varrho = \frac{HR}{2(H+r-R)}$$

$$\varrho = \frac{3.2}{2(3+\frac{5}{8}-2)}$$

$$\varrho = \frac{6}{2.1\frac{5}{8}} = 1\frac{7}{11}\text{ Elle} = 1\text{ E. }15\frac{3}{11}\text{ Z.}$$

2) Berechnung der Höhe des Cylinders.

$$h = \frac{HR}{(R-r)} \cdot \frac{(H+2r-2R)}{(2H+2r-2R)}$$

$$h = \frac{3.2}{(2-\frac{5}{8})} \cdot \frac{(3+2.\frac{5}{8}-2.2)}{(2.3+2.\frac{5}{8}-2.2)}$$

$$h = \frac{6}{1\frac{5}{8}} \cdot \frac{\frac{2}{3}}{3\frac{2}{3}} = 0{,}935\text{ Ell.} = 22{,}44\text{ Zoll.}$$

185ste Aufgabe.

In den Kegel ACB, Fig. 96, dessen Halbmesser $AD = R = 1$ Fuß, und die Höhe $DC = H = 4$ Fuß ist, soll ein auf seiner Spitze stehender Kegel EDF, welcher die größte Seitenfläche hat, eingeschrieben werden; wie groß ist sein Halbmesser $EG = r$, und seine Höhe $DG = h$ anzunehmen?

Auflösung.

1) Berechnung des Halbmessers.

$R = 1'$
$H = 4'$

$$r = \tfrac{1}{4} H \cdot \frac{R[3H \pm \sqrt{H^2 - 8R^2}]}{(R^2+H^2)}$$

$$r = \tfrac{1}{4}.4.\frac{1.[3.4 \pm \sqrt{4^2 - 8.1^2}]}{(1^2+4^2)}$$

$$r = \frac{12 \pm \sqrt{8}}{17}$$

$$r = \frac{12 \pm 2{,}8284}{17}$$

$$r = 0{,}8722' \text{ oder } 0{,}5395'.$$

2) Berechnung der Höhe des Kegels.

$$h = \tfrac{1}{4}H.\frac{4R^2+H^2 \mp H\sqrt{H^2-8R^2}}{R^2+H^2}$$

$$h = \tfrac{1}{4}.4.\frac{4.1^2+4^2 \mp 4\sqrt{4^2-8.1^2}}{1^2+4^2}$$

$$h = \frac{4+16 \mp .4\sqrt{8}}{17}$$

$$h = \frac{20 \mp 4.2{,}8284}{17}$$

$$h = 0{,}5109' \text{ oder } 1{,}8419'.$$

Anmerk. Hier kann nur ein Maximum der Seitenfläche des eingeschriebenen Kegels stattfinden, wenn $H =$ oder $>$ als $R\sqrt{8}$ nämlich größer als 2,8284.R gegeben ist.

186ste Aufgabe.

Der Inhalt eines geradstehenden Kegels, Fig. 91, sei $= A = 36^{c'}$; wie groß müssen seine Dimensionen $AC = r$ und $DC = h$ angenommen werden, daß der Inhalt einer in selbigen beschriebenen Kugel, die seine Grund- und Seitenfläche berührt, ein Maximum werde?

Auflösung.

1) Berechnung des Halbmessers.

$A = 36^{c'}$.

$$r = 0{,}6963\sqrt[3]{A}$$

$$r = 0{,}6963\sqrt[3]{36}$$

$$r = 0{,}6953 . 3{,}3019$$

$$r = 2{,}2958'.$$

2) Berechnung der Höhe des Kegels.

$$h = 1{,}9695 \sqrt[3]{A}$$

$$h = 1{,}9695 . \sqrt[3]{36}$$

$$h = 1{,}9695 . 3{,}3019$$

$$h = 6{,}503'.$$

187ste Aufgabe.

In einem Kegel, Fig. 91, dessen Seitenfläche $= B = 60$ □′ gegeben ist, soll eine Kugel vom größtmöglichsten Inhalte angeschrieben werden; welche Größe muß der Halbmesser des Kegels $= r$ und seine Höhe $= h$ erhalten?

Auflösung.

1) Berechnung des Halbmessers vom Kegel.

$B = 60$ □′.

$$r = 0{,}3631 \sqrt{B}$$

$$r = 0{,}3631 . \sqrt{60}$$

$$r = 0{,}3631 . 7{,}7459$$

$$r = 2{,}8125'.$$

2) Berechnung der Höhe desselben.

$$h = 0{,}7978 \sqrt{B}$$

$$h = 0{,}7978 \sqrt{60}$$

$$h = 0{,}7978 . 7{,}7459$$

$$h = 6{,}1796'.$$

188ste Aufgabe.

Die Außenflächen eines geradstehenden Kegels, Fig. 97, betragen $= B = 80$ □′; wie groß ist gegenwärtig sein Halbmesser $= r$ und seine Höhe $= h$ anzunehmen, daß der größtmöglichste Inhalt einer Kugel in selbigem beschrieben werden kann?

Auflösung.

1) Berechnung des Halbmessers vom Kegel.

$B = 80 \square'$.

$$r = 0{,}2821 \sqrt{B}$$
$$r = 0{,}2821 \sqrt{80}$$
$$r = 0{,}2821 . 8{,}9443.$$
$$r = 2{,}5231'.$$

2) Berechnung der Höhe desselben.

$$h = 0{,}7978 \sqrt{B}$$
$$h = 0{,}7978 \sqrt{80}$$
$$h = 0{,}7978 . 8{,}9443$$
$$h = 7{,}1357'.$$

189ste Aufgabe.

Der Halbmesser einer Kugel, Fig. 98, sei $= r = 4'$. In dieselbe soll der größte Cylinder an körperlichem Inhalte eingeschrieben werden; welchen Halbmesser $= R$ und welche Höhe $= H$ wird derselbe erhalten?

Auflösung.

1) Berechnung des Halbmessers vom Cylinder.

$r = 4'$.

$$R = 0{,}8165 . r$$
$$R = 0{,}8165 . 4$$
$$R = 3{,}2660'.$$

2) Berechnung der Höhe desselben.

$$H = 0{,}5773 . r$$
$$H = 0{,}5773 . 4$$
$$H = 2{,}3092'.$$

190ste Aufgabe.

In eine Kugel, deren Halbmesser $= r = 3'6''$ ist, soll ein Cylinder beschrieben werden, der die größte Seitenfläche hat, welchen Halbmesser $= R$ und welche Höhe $= H$ wird derselbe erhalten müssen?

Auflösung.

Berechnung des Halbmessers vom Cylinder und der Höhe desselben.

$r = 3{,}6'$.

Hier ist sowohl R als $H = 0{,}7071 . r$

$R = H = 0{,}7041 . 3{,}6$

$R = H = 2{,}5455'$.

191ste Aufgabe.

Welchen Halbmesser $= R$ und welche Höhe $= H$ wird ein Cylinder, Fig. 98, erhalten, wenn derselbe in einer Kugel beschrieben, die größte Außenfläche haben soll, und der Halbmesser der Kugel $= r = 1$ Elle 4 Zoll gegeben ist?

Auflösung.

1) Berechnung des Halbmessers vom Cylinder.

$r = 1\frac{1}{3}$ Elle.

$R = 0{,}8506 . r$

$R = 0{,}8506 . 1\frac{1}{3}$

$R = 0{,}9923$ Ellen $= 23{,}81$ Zoll.

2) Berechnung der Höhe desselben.

$H = 0{,}5257 . r$

$H = 0{,}5257 . 1\frac{1}{3}$

$H = 0{,}6133$ Ellen $= 14{,}719$ Zoll.

192ste Aufgabe.

Der Halbmesser einer Kugel, Fig. 98, sei $= r = 8''$. Es soll ein Kegel vom größtmöglichsten Inhalte in selbigem beschrieben werden; wie groß ist der Halbmesser seiner Grundfläche $= R$ und seine Höhe $= H$ anzunehmen?

Auflösung.

1) Berechnung des Halbmessers vom Kegel.

$r = 8''$.

$R = 0{,}9428 . r$

$R = 0{,}9428 . 8$

$R = 7{,}5424''$.

2) Berechnung der Höhe desselben.

$$H = 1{,}3333 . r$$
$$H = 1{,}3333 . 8$$
$$H = 10{,}6664''.$$

Anmerk. Dieselben Dimensionen bleiben, wenn der einzuschreibende Kegel die größte Seitenfläche haben soll.

193ste Aufgabe.

Welchen Halbmesser = R und welche Höhe = H ist für den in einer Kugel zu beschreibenden Kegel, Fig. 98, anzunehmen, daß derselbe die größte Außenfläche erhält und der Halbmesser der Kugel = r = 20 Zoll ist?

Auflösung.

1) Berechnung des Halbmessers.

r = 20 Zoll.

$$R = 0{,}9837 . r$$
$$R = 0{,}9837 . 20$$
$$R = 19{,}674 \text{ Zoll}.$$

2) Berechnung der Höhe des Cylinders.

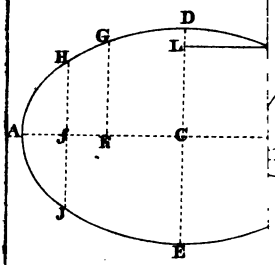
$$H = 1{,}1798 . r$$
$$H = 1{,}1798 . 20$$
$$H = 23{,}596 \text{ Zoll}.$$

Gedruckt in der Gärtner'schen Buchdruckerei.

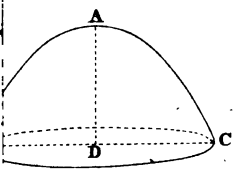
Verbesserungen.

Seite 10 Zeile 10 v. u., statt LF = L'f ꝛc., l. m. MI = MK ꝛc.
" 11 " 7 v. u., statt KB, lese man KA.
" 12 " 1 v. u., statt BK, lese man AK.
" 13 " 15 v. o., statt BC, lese man BC = y.
" 18 " 14 v. o. ist nach 6 Zoll „der Parameter p = $1\frac{7}{8}$ Elle" einzuschalten, und statt 5 Ellen 20 Zoll, 5 Ellen 18 Zoll zu lesen.
" 19 " 11 v. u., st. Abscisse, l. m. Ordinate.
" 25 " 1 v. o., st. $\left(\frac{a^2-x^2}{a^2}\right)$, l. m. $\left(\frac{a^2-c^2}{a^2}\right)$
10 v. u., st. Ellen, l. m. Zolle.
" 26 " 10 v. u., statt AF, lese man AK.
" 27 " 11 v. u., st. $\Gamma 1\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$, l. m. $\Gamma 1\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}$.
" 29 " 3, 4, 5, 6 v. u., st. ⊖, l. m. S.
" 39 " 2 v. u., st. $40\frac{2}{7}$, l. m. $39\frac{1}{13}$, folgl. ist Q. = 30,997 K. W. Fuß.
" 54 " 10 v. u., st. FG = 2, l. m. FG = b = 2.
" 74 " 1 v. u., st. $\left(\frac{2^2+b^2}{2b}\right)$, l. m. $\left(\frac{a^2+b^2}{2b}\right)$
" 76 " 10 v. u., st. Q, l. m. Q'.
" 77 " 7 v. o., st. r^3a', l. m. r^2a'.
" 81 " 7, 8, 9 v. u., st. $2\frac{1}{6}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{2}{3}$, l. m. 2, 2, 3.
" 109 " 5 v. o., st. 633,996, l. m. 433,996.
" 115 " 11 v. o., st. Quadrat, l. m. Quadrant.
" 120 " 7 v. u., st. AMS, l. m. AA'S.
16 v. u., st. AMD, l. m. AMB.
" 129 " 4 v. u., st. 57° 30', l. m. 57° 20'.
" 130 " 10 v. u., st. 0,29715, l. m. 0,59715.
" 134 " 9 v. u. nach A'G'M' schalte man ein „= α = 130° und ∠ACM',,.
" 138 " 5 v. o., st. 0,3476, l. m. 0,3746, daher ist x = 1,475'.
" 143 " 7 v. u., st. $5\frac{2}{4}$, l. m. $5\frac{2}{3}$.
" 177 " 11 v. u., st. 3,9 31, l. m. 3,9+3,1.

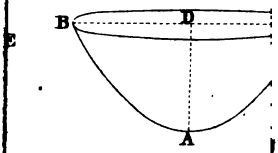
2.



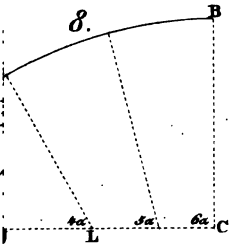
5.



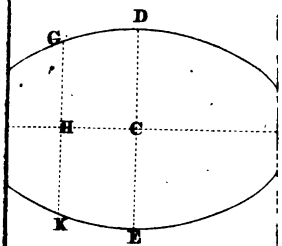
7.



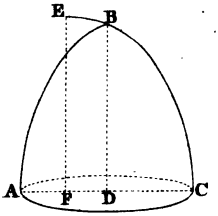
8.

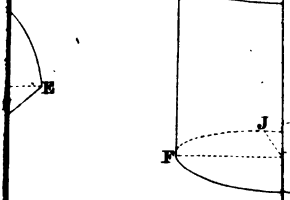


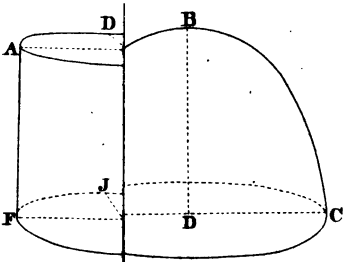
10.



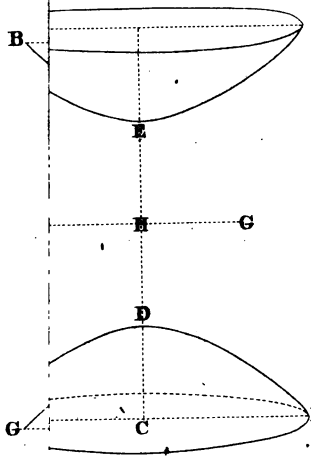
13.

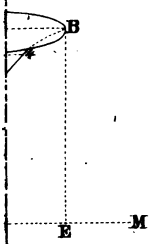




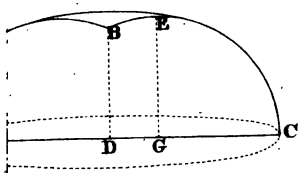


21.

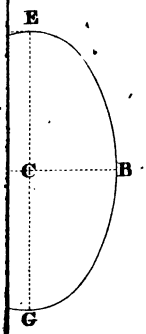




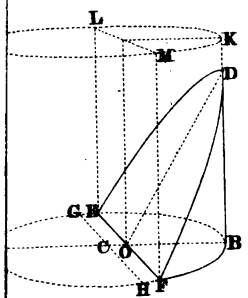
25.



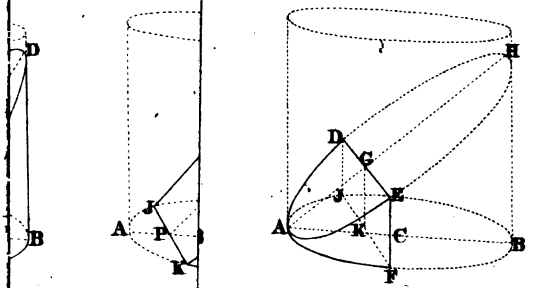
26.



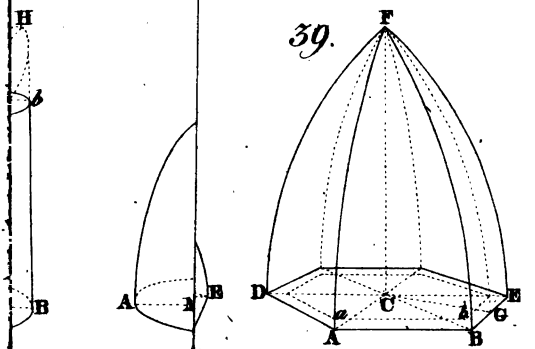
29.



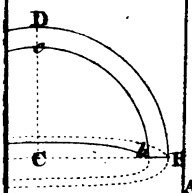
34.



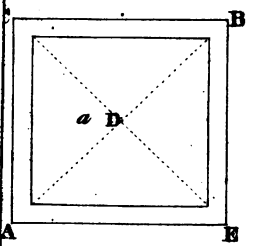
39.



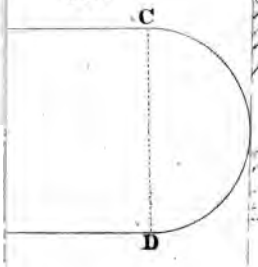
40.



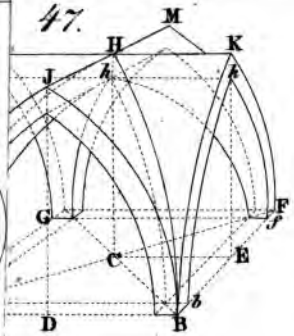
43.



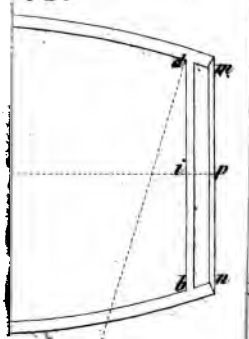
45.



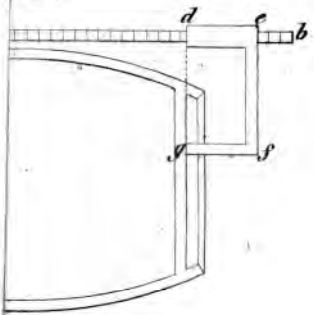
47.



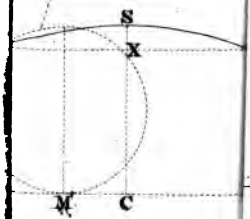
48.

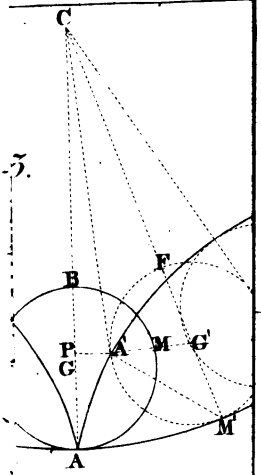


50.

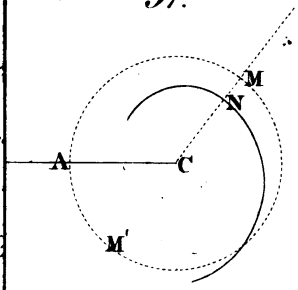


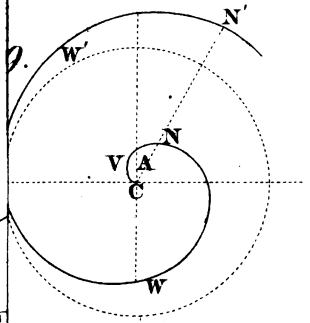
54.

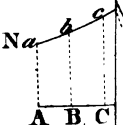




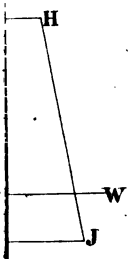
57.

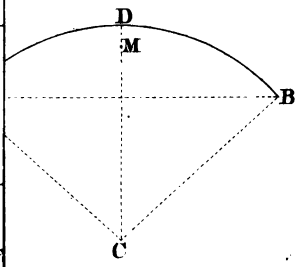






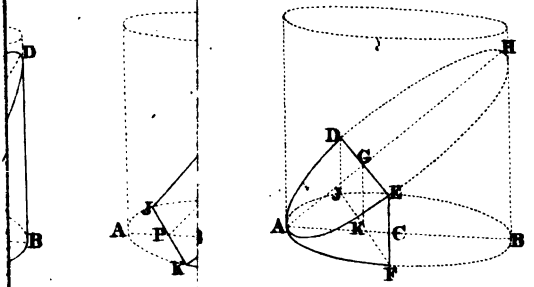
63.

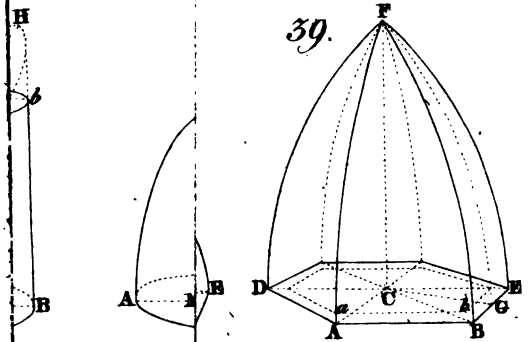




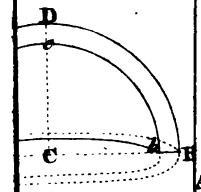
UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 06389 5729
A 546454

34.

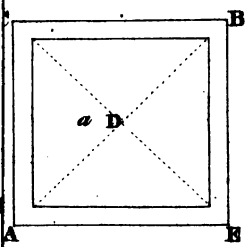




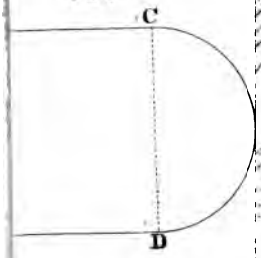
40.



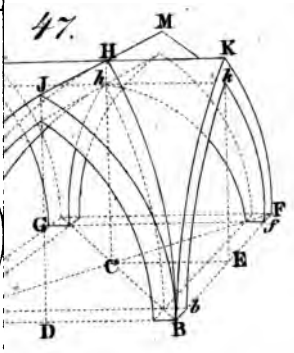
43.



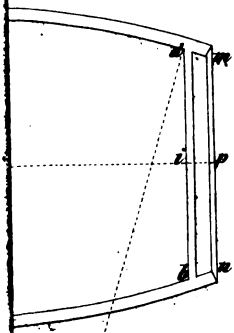
45.



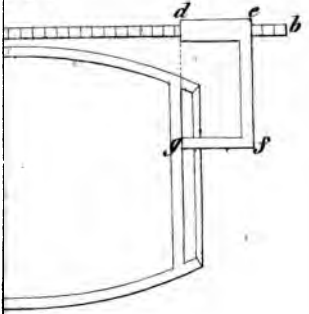
47.

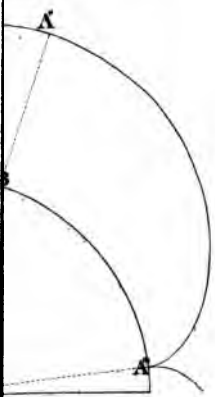


48.

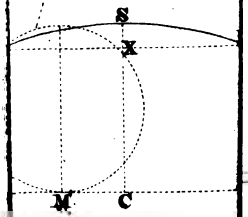


50.

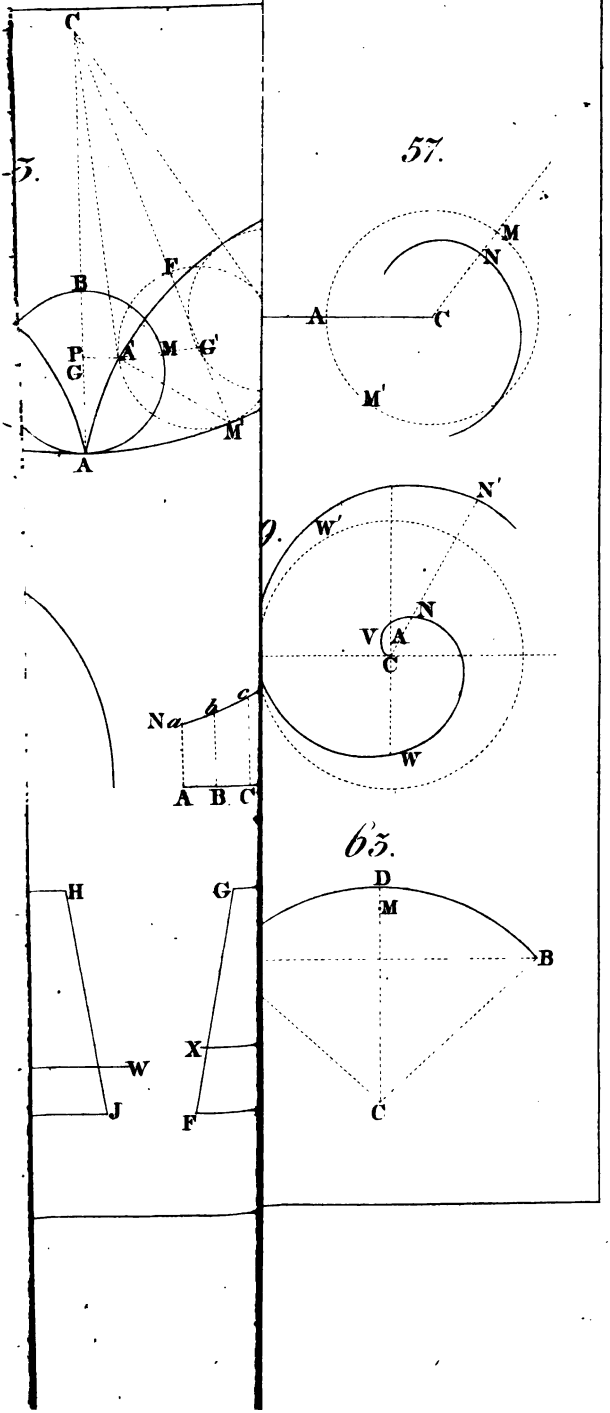


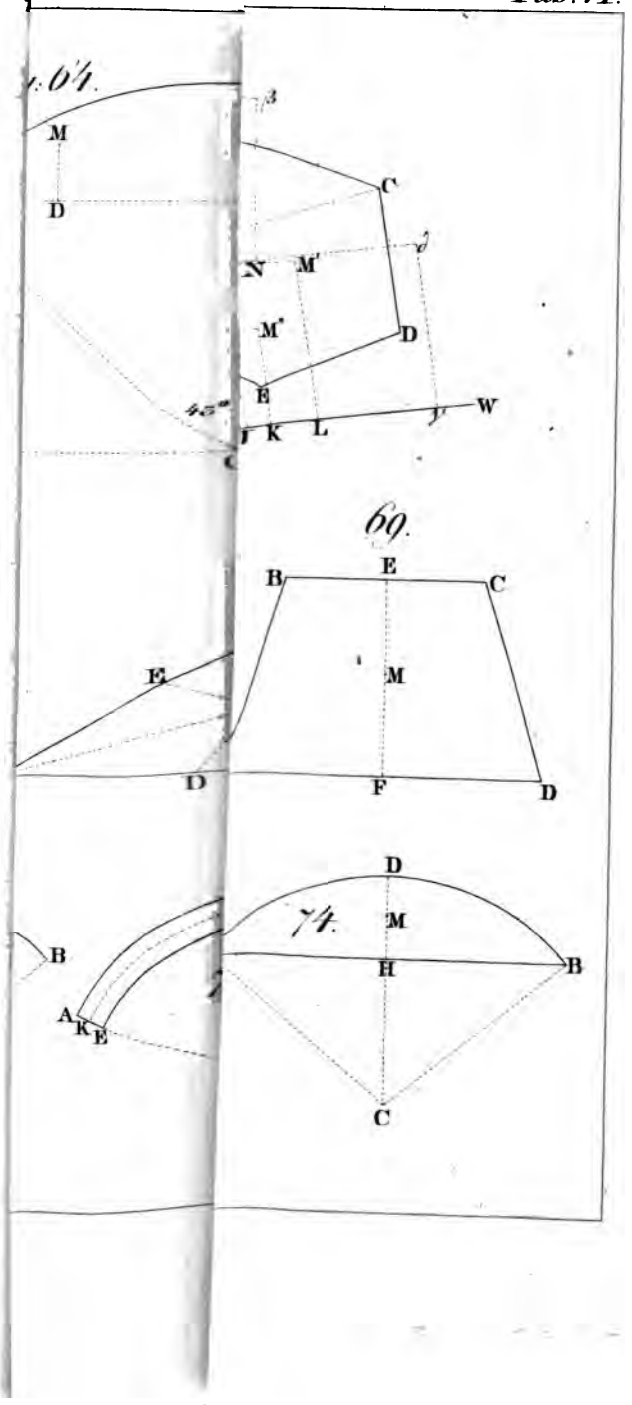


54.

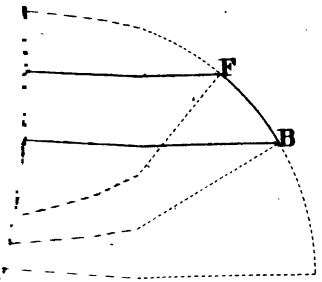


Tab: V.

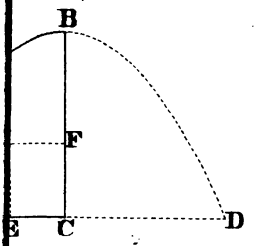



64.
M
D
C
N
M'
M''
D
E
45°
K
L
W
69.
B
E
C
M
E
D
F
D
D
74.
M
B
H
B
A
K
E
C

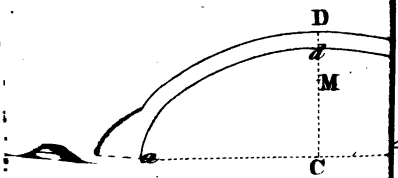
5.



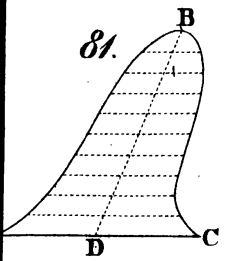
77.



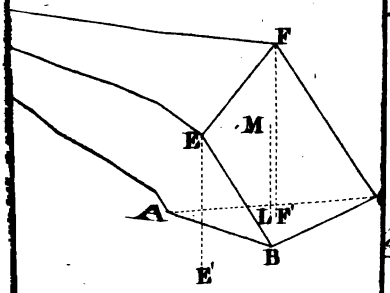
79.



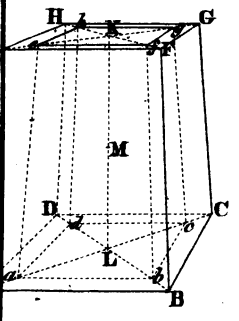
81.



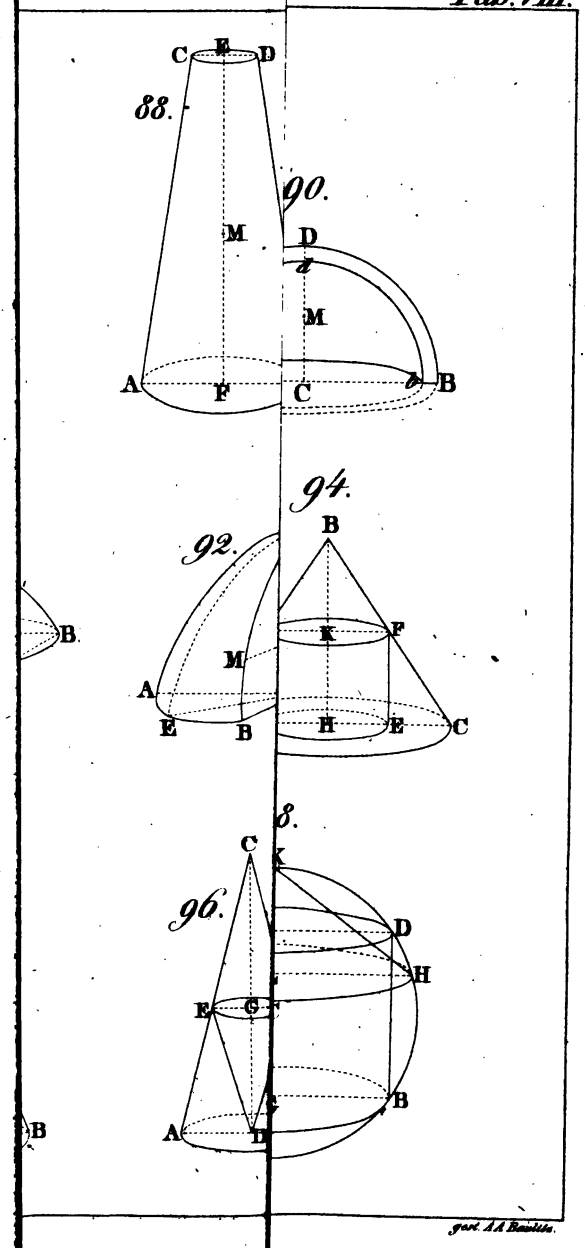
86.



85.



Tab. VIII.



gest. A.A. Baulitz.